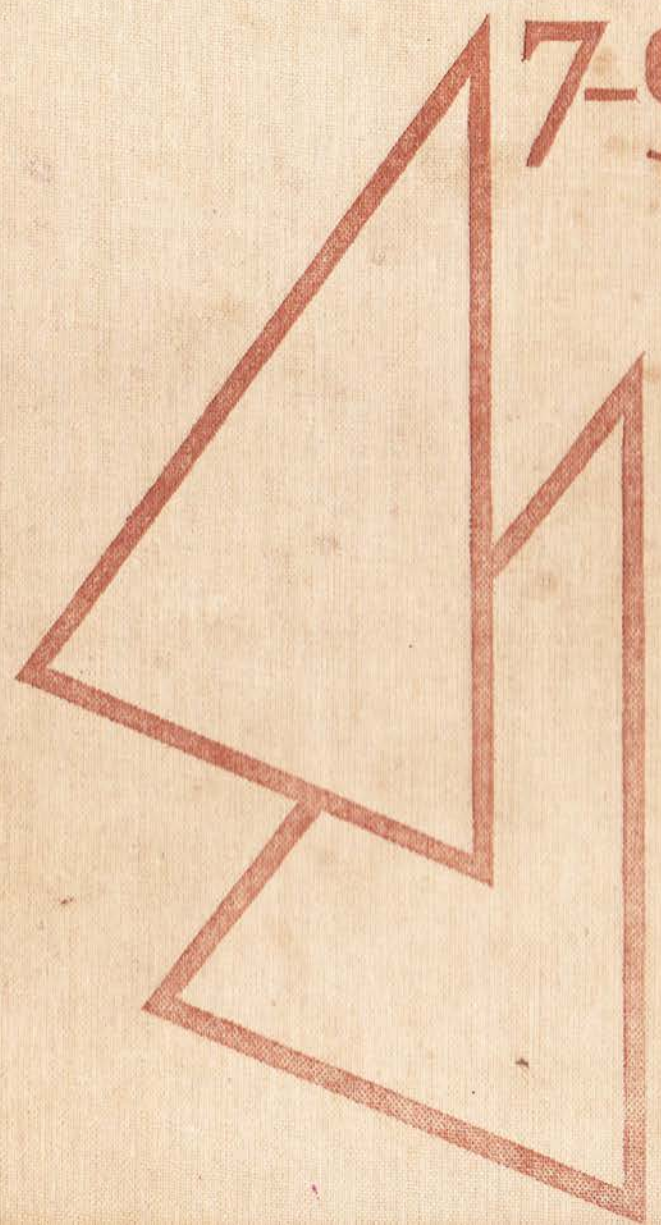
A.V. Pogorelov

GEOMETRIA

7–9



A.V. Pogorelov

GEOMETRIA

Ediţia 8

CHIŞINĂU
„LUMINA" 1990

Traducere din limba rusă
de *I. Goian* şi *I. Chitoroagă*

Recenzent academicianul A.Ş. a R.S.S.M. *C. Sibirski*

А. В. Погорелов. Геометрия. Учебное пособие для 6—8 классов средней школы. Допущено Министерством просвещения СССР. Издание 7. Москва «Просвещение», 1988.

P $\frac{4306020502-078}{M752(10)-90}$ scris. M.I.P. al R.S.S.M.—89

ISBN 5-372-00739-7

© Издательство «Просвещение», 1982
© Издательство «Просвещение», 1986, с. изменениями
© Traducere de I. M. Goian şi I. D. Chitoroagă, 1990

Clasa 7

PLANIMETRIA

§ 1. PROPRIETĂŢILE FUNDAMENTALE ALE CELOR MAI SIMPLE FIGURI GEOMETRICE

Geometria este ştiinţa despre proprietăţile figurilor geometrice. „Geometrie" este un cuvînt grecesc, care în traducere înseamnă „măsurarea pămîntului". Această denumire e legată de aplicarea geometriei la măsurări pe teren.

Exemple de figuri geometrice sînt: triunghiul, pătratul, circumferinţa (fig. 1).

Figurile geometrice sînt extrem de variate. O parte a oricărei figuri geometrice este de asemenea o figură geometrică. Reuniunea cîtorva figuri geometrice este din nou o figură geometrică. Partea stîngă a figurii 2 constă dintr-un triunghi şi trei pătrate, iar cea din dreapta constă dintr-o circumferinţă şi din părţi de circumferinţă. Ne putem imagina că orice figură geometrică este compusă din puncte.

Geometria se aplică pe larg în practică. Şi muncitorul, şi inginerul, şi arhitectorul, şi pictorul e necesar să ştie geometrie. Într-un cuvînt, geometria trebuie s-o cunoască toţi.

Geometria care se studiază în şcoală se numeşte geometrie euclidiană, după numele savantului din Grecia Antică Euclid (sec. III î.e.n.), care a creat un manual remarcabil de matematică cu denumirea „Elementele". În decursul unui timp îndelungat geometria se învăţa după această carte.

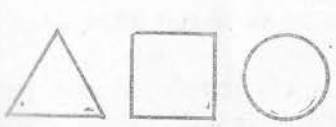


Fig. 1

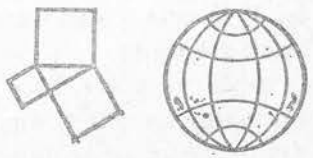


Fig. 2

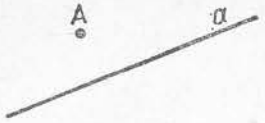


Fig. 3

Noi vom începe studiul geometriei cu planimetria. *Planimetria* este un compartiment al geometriei în care se studiază figurile pe plan.

1. PUNCTUL ŞI DREAPTA

Figurile geometrice fundamentale pe plan sînt *punctul* şi *dreapta*. Punctele şi dreptele se trasează pe desen cu un creion bine ascuţit. Pentru construirea dreptelor se foloseşte rigla. De obicei punctele se notează cu litere latine mari: *A, B, C, D, ...* . Dreptele se notează cu litere latine mici: *a, b, c, d, ...* .

În figura 3 sînt date punctul *A* şi dreapta *a*.

2. PROPRIETĂŢILE FUNDAMENTALE DE APARTENENŢĂ A PUNCTELOR ŞI DREPTELOR

Priviţi figura 4. Vedeţi dreptele *a, b* şi punctele *A, B, C*. Punctele *A* şi *C sînt situate* (se află) pe dreapta *a*. Se poate spune, de asemenea, că punctele *A* şi *C aparţin dreptei a* sau că dreapta *a trece* prin punctele *A* şi *C*.

Punctul *B* este situat pe dreapta *b*. El nu este situat pe dreapta *a*. Punctul *C* este situat şi pe dreapta *a*, şi pe dreapta *b*. Dreptele *a* şi *b se intersectează* în punctul *C*. Punctul *C* este *punctul de intersecţie* a dreptelor *a* şi *b*.

În figura 5 vedeţi cum se construieşte cu ajutorul riglei o dreaptă care trece prin două puncte date *A* şi *B*.

Următoarele două proprietăţi se numesc p r o p r i e t ă ţ i f u n d a m e n t a l e de apartenenţă a punctelor şi dreptelor pe plan:

I_1. ***Oricare ar fi dreapta există puncte ce aparţin acestei drepte şi puncte ce nu-i aparţin.***

I_2. ***Prin orice două puncte se poate duce o dreaptă şi numai una singură.***

Dreapta se poate nota prin două puncte, situate pe ea. De exemplu, dreapta *a* din figura 4 poate fi notată prin *AC*, iar dreapta *b* poate fi notată prin *BC*.

Două drepte pot oare avea mai mult decît un punct de intersecţie? Nu pot. Dacă ele ar avea două puncte de intersecţie prin aceste puncte ar trece două drepte diferite. Aceasta însă este imposibil, deoarece prin două puncte trece o singură dreaptă. Aşadar, vom avea următoarea proprietate:

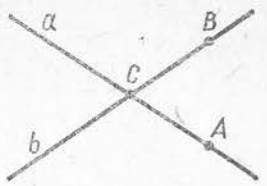


Fig. 4

1.1. ***Două drepte diferite sau nu se intersectează sau se intersectează numai într-un singur punct.***

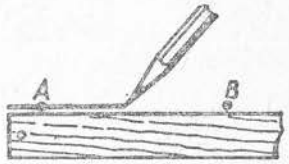


Fig. 5

3. PROPRIETĂŢILE FUNDAMENTALE DE AMPLASARE RECIPROCĂ A PUNCTELOR PE DREAPTĂ ŞI PE PLAN

Priviţi figura 6. Vedeţi dreapta *a* şi trei puncte *A, B, C* pe această dreaptă. Punctul *B* e situat *între* punctele *A* şi *C*, el *separă* punctele *A* şi *C*. Se poate spune, de asemenea, că punctele *A* şi *C sînt situate de diferite părţi* ale punctului *B*. Punctele *A* şi *B sînt situate de aceeaşi parte* a punctului *C*, ele nu sînt separate de punctul *C*. Punctele *B* şi *C* sînt situate de aceeaşi parte a punctului *A*.

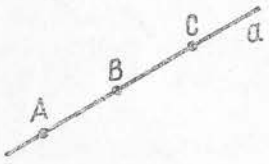


Fig. 6

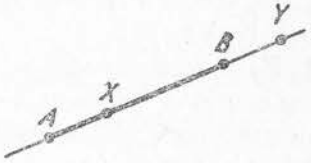


Fig. 7

Se numeşte *segment o parte* a dreptei, care constă din toate punctele acestei drepte, situate între două puncte date ale ei. Aceste puncte se numesc *extremităţi* ale segmentului. Segmen-

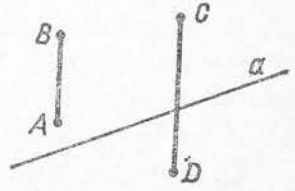


Fig. 8

tul se notează, indicîndu-se extremităţile lui. Cînd se spune sau se scrie „segmentul AB" se subînţelege segmentul cu extremităţile în punctele A şi B.

În figura 7 vedeţi segmentul AB. El este o parte a dreptei AB. Această parte a dreptei este evidenţiată printr-o linie groasă. Punctul X al dreptei e situat între punctele A şi B. De aceea el aparţine segmentului AB. Punctul Y nu e situat între punctele A şi B. De aceea el nu aparţine segmentului AB.

Priviţi figura 8. Dreapta a *împarte* planul în două semiplane aşa fel încît fiecare punct al planului ce nu aparţine dreptei a e situat pe unul din ele. Această împărţire are următoarea proprietate. ***Dacă extremităţile unui segment oarecare sînt situate într-un semiplan, segmentul nu se intersectează cu dreapta. Dacă extremităţile segmentului sînt situate în diferite semiplane, segmentul se intersectează cu dreapta.*** În figura 8 punctele A şi B sînt situate în unul din semiplanele în care dreapta a împarte planul. De aceea segmentul AB nu se intersectează cu dreapta a. Punctele C şi D sînt situate în diferite semiplane. De aceea segmentul CD intersectează dreapta a.

Proprietăţile fundamentale de amplasare a punctelor pe dreaptă şi pe plan sînt următoarele:

II_1. ***Din trei puncte ale unei drepte unul şi numai unul e situat între celelalte două.***

II_2. ***Orice dreaptă împarte planul în două semiplane.***

Problemă (9)*. Sînt date o dreaptă şi trei puncte A, B, C care nu sînt situate pe această dreaptă. Se ştie că segmentul AB intersectează dreapta, iar segmentul AC n-o intersectează. Intersectează oare dreapta segmentul BC? Argumentaţi răspunsul.

Rezolvare. Dreapta împarte planul în două semiplane. Punctul A aparţine unuia din ele. Segmentul AC nu intersectează dreapta. Deci, punctul C e situat în acelaşi semiplan ca şi punctul A. Segmentul AB intersectează dreapta. Deci punctul B se află în celălalt semiplan. Aşadar, punctele B şi C sînt situate în diferite semiplane. Aceasta înseamnă că segmentul BC intersectează dreapta noastră.

* În paranteze e pus numărul problemei din lista exerciţiilor de la sfîrşitul paragrafului.

4. SEMIDREAPTA

Fie a o dreaptă şi A un punct al ei (fig. 9, a). Prin punctul A ducem o dreaptă b diferită de dreapta a. Dreapta b împarte planul în două semiplane. Partea dreptei a ce constă din toate punctele ei, care aparţin unui semiplan, se numeşte *semidreaptă*. Punctul A se numeşte *originea semidreptei*. Dreapta b împarte dreapta a în două semidrepte. Ele se numesc *complementare*. Împărţirea dreptei a în două semidrepte nu depinde de alegerea dreptei b, adică orice altă dreaptă b_1 care trece prin punctul A împarte dreapta a în aceleaşi două semidrepte. De aceea vom spune că punctul A împarte dreapta dată.

Din proprietăţile împărţirii planului în două semiplane rezultă proprietăţile împărţirii dreptei în semidrepte, şi anume: *punctele care aparţin unei semidrepte se află de aceeaşi parte a punctului ce împarte dreapta, iar punctele care aparţin semidreptelor complementare se află de diferite părţi ale acestui punct.* În figura 9, a punctele X şi Y aparţin unei semidrepte. Ele sînt situate de aceeaşi parte a punctului A. Punctele X şi Z aparţin semidreptelor complementare. Ele sînt situate de diferite părţi ale punctului A.

La întrebarea, ce este o semidreaptă, se poate răspunde simplu: semidreapta este o parte a dreptei care constă din toate punctele ei situate de aceeaşi parte a unui punct dat

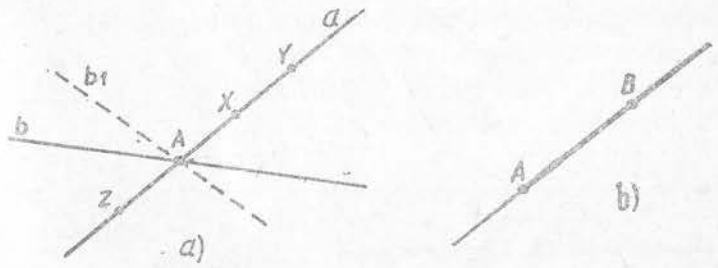


Fig. 9

al ei. Semidreptele diferite ale unei drepte care au o origine comună sînt complementare.

Vom nota semidreptele cu litere latine mici. O semidreaptă se poate nota şi prin două puncte: originea şi încă un punct oarecare ce aparţine semidreptei. Pe primul loc se pune întotdeauna originea. De exemplu, semidreapta evidenţiată în figura 9, *b* printr-o linie groasă poate fi notată prin *AB*.

Problemă (13). Pe segmentul *AB* e luat punctul *C*. Printre semidreptele *AB*, *AC*, *CA* şi *CB* numiţi perechi de semidrepte care coincid, de semidrepte complementare. Argumentaţi răspunsul.

Rezolvare. Semidreptele date au drept origine sau punctul *A*, sau punctul *C*. Considerăm mai întîi semidreptele cu originea *A* (semidreptele *AB* şi *AC*). Punctul *C* e situat între punctele *A* şi *B*, deoarece conform condiţiei problemei el aparţine segmentului *AB*. Deci punctul *A* nu este situat între punctele *B* şi *C*, adică punctele *B* şi *C* sînt situate de aceeaşi parte a punctului *A*. De aceea semidreptele *AB* şi *AC* coincid.

Considerăm acum semidreptele cu originea *C* (semidreptele *CA* şi *CB*). Punctul *C* separă punctele *A* şi *B*. De aceea punctele *A* şi *B* nu pot aparţine unei semidrepte, deci semidreptele *CA* şi *CB* sînt complementare.

5. PROPRIETĂŢILE FUNDAMENTALE DE MĂSURARE A SEGMENTELOR ŞI A UNGHIURILOR

Pentru măsurarea segmentelor se folosesc diferite instrumente de măsură. Cel mai simplu instrument de acest fel este rigla cu diviziuni. În figura 10 segmentul *AB* este egal cu 10 cm, segmentul *AC* — cu 6 cm, iar segmentul *BC* — cu 4 cm. Lungimea segmentului *AB* este egală cu suma lungimilor segmentelor *AC* şi *BC*.

Fig. 10

Proprietăţile fundamentale de măsurare a segmentelor sînt următoarele:

III$_1$. ***Fiecare segment are o anumită lungime mai mare decît zero. Lungimea segmentului este egală cu suma lungimilor părţilor în care e împărţit el de orice punct al său.***

Prin urmare, dacă pe segmentul *AB* luăm orice punct *C* lungimea segmentului *AB* este egală cu suma lungimilor segmentelor *AC* şi *BC*. Lungimea segmentului *AB* se numeşte, de asemenea, *distanţă* dintre punctele *A* şi *B*.

Problemă (16). Trei puncte *A*, *B*, *C* sînt situate pe aceeaşi dreaptă. Se ştie că $AB=4{,}3$ cm, $AC=7{,}5$ cm, $BC=3{,}2$ cm. Punctul *A* poate oare fi situat între punctele *B* şi *C*? Punctul *C* poate oare fi situat între punctele *A* şi *B*? Care din cele trei puncte *A*, *B*, *C* e situat între celelalte două?

Rezolvare. Dacă punctul *A* e situat între punctele *B* şi *C* conform proprietăţii măsurării segmentelor trebuie să avem: $AB+AC=BC$. Însă $4{,}3+7{,}5\neq3{,}2$. Deci, punctul *A* nu este situat între punctele *B* şi *C*.

Dacă punctul *C* e situat între punctele *A* şi *B* trebuie să avem: $AC+BC=AB$. Însă $7{,}5+3{,}2\neq4{,}3$. Deci *C* nu e situat între punctele *A* şi *B*.

Din trei puncte *A*, *B*, *C* situate pe o dreaptă unul e situat între celelalte două. Deci, acest punct este *B*.

Se numeşte *unghi* figura care constă dintr-un punct — *vîrful unghiului* — şi două semidrepte diferite care pornesc din acest punct numite *laturi ale unghiului*.

Dacă laturile unui unghi sînt semidrepte complementare ale unei drepte, unghiul se numeşte *întins*.

În figura 11 vedeţi un unghi cu vîrful *O* şi laturile *a*, *b*. Unghiul se notează prin vîrful lui, sau prin laturile lui, sau prin trei puncte: vîrful şi două puncte pe laturile unghiului. Cuvîntul „unghi" uneori se înlocuieşte cu semnul ∠. Unghiul din figura 11 se poate nota în trei feluri: $\angle O$, $\angle(ab)$, $\angle AOB$. În cazul al treilea litera care indică vîrful se scrie la mijloc.

Vom spune că semidreapta *trece între* laturile unghiului dat dacă ea

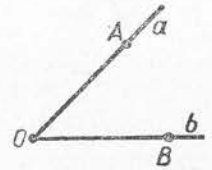


Fig. 11

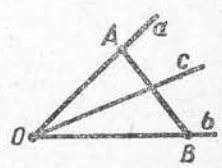


Fig. 12

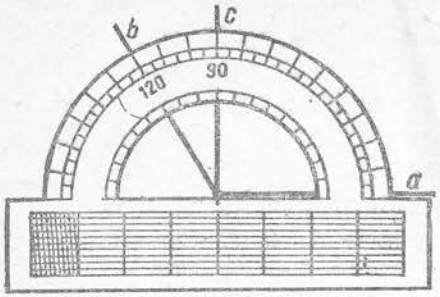


Fig. 13

pleacă din vîrful lui şi intersectează un segment oarecare cu extremităţile pe laturile unghiului. În figura 12 semidreapta C trece între laturile unghiului (ab), deoarece ea pleacă din vîrful unghiului (ab) şi intersectează segmentul AB cu extremităţile pe laturile lui.

În cazul unui unghi întins considerăm că o r i c e s e m i d r e a p t ă care pleacă din vîrful lui şi diferă de laturile lui trece între laturile unghiului.

Unghiurile se măsoară în grade cu ajutorul raportorului. În figura 13 unghiul (ab) este egal cu 120°, semidreapta c trece între laturile unghiului (ab). Unghiul (ac) este egal cu 90°, iar unghiul (bc) este egal cu 30°. Unghiul (ab) este egal cu suma unghiurilor (ac) şi (bc).

P r o p r i e t ă ţ i l e f u n d a m e n t a l e de măsurare a unghiurilor sînt următoarele:

III_2. ***Fiecare unghi are o anumită măsură în grade mai mare decît zero. Unghiul întins este egal cu 180°. Măsura în grade a unui unghi este egală cu suma măsurilor în grade ale unghiurilor în care el este împărţit de orice semidreaptă ce trece între laturile lui.***

Prin urmare, dacă semidreapta c trece între laturile unghiului (ab), unghiul (ab) este egal cu suma unghiurilor (ac) şi (bc).

Problemă (28). Semidreapta c poate oare trece între laturile unghiului (ab), dacă $\angle(ac)=30°$, $\angle(cb)=80°$, $\angle(ab)=50°$?

R e z o l v a r e. Dacă semidreapta c trece între laturile unghiului (ab), conform proprietăţii de măsurare a unghiurilor trebuie să avem: $\angle(ac)+\angle(cb)=\angle(ab)$. Însă $30°+80°\neq50°$. Deci, semidreapta c nu poate trece între laturile unghiului (ab).

6. PROPRIETĂŢILE FUNDAMENTALE DE DEPUNERE A SEGMENTELOR ŞI A UNGHIURILOR

În figura 14 e arătat cum se poate depune cu ajutorul riglei pe semidreapta a cu originea A un segment de lungime dată (3 cm).

Priviţi figura 15. Semidreapta a, fiind prelungită dincolo de originea A, împarte planul în două semiplane. În figură e arătat cum se poate depune cu ajutorul raportorului de la semidreapta a în semiplanul de sus un unghi de măsură dată în grade (60°).

P r o p r i e t ă ţ i l e f u n d a m e n t a l e de depunere a segmentelor şi unghiurilor sînt următoarele:

IV_1. ***Pe orice semidreaptă de la originea ei se poate depune un segment de lungime dată şi numai unul singur.***

IV_2. ***De la orice semidreaptă în semiplanul dat se poate depune un unghi de o anumită măsură dată în grade mai mică decît 180° şi numai unul singur.***

P r o b l e m ă (35). Pe semidreapta AB este depus segmentul AC mai mic decît segmentul AB. Care din trei puncte A, B, C este situat între celelalte două? Argumentaţi răspunsul.

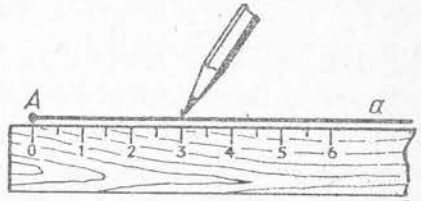


Fig. 14

R e z o l v a r e. Întrucît punctele B şi C sînt situate pe o semidreaptă cu originea A ele nu sînt împărţite de punctul A, adică punctul A nu este situat între punctele B şi C. Punctul B poate oare fi situat între A şi C? Dacă el ar fi situat între punctele A şi C, am avea

$$AB+BC=AC.$$

Dar aceasta e imposibil, deoarece din con-

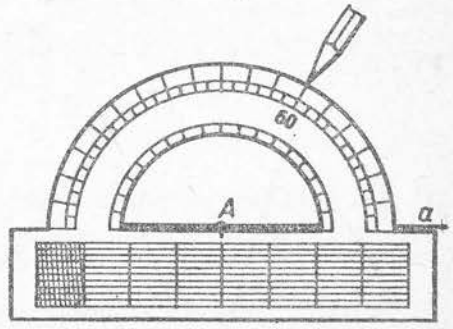


Fig. 15

diție segmentul AC este mai mic decît segmentul AB. Deci, punctul B nu este situat între punctele A și C. Din trei puncte A, B, C unul e situat între celelalte două. De aceea punctul C e situat între punctele A și B.

7. EXISTENȚA UNUI TRIUNGHI EGAL CU TRIUNGHIUL DAT

Se numește *triunghi* figura care constă din trei puncte ce nu aparțin unei drepte și trei segmente ce unesc aceste puncte două cîte două. Punctele se numesc *vîrfuri* ale triunghiului, iar segmentele — *laturi* ale lui. În figura 16 vedeți un triunghi cu vîrfurile A, B, C și laturile AB, BC, AC. Triunghiul se notează, indicîndu-se vîrfurile lui. Uneori în locul cuvîntului „triunghi" se folosește semnul $\triangle$. De exemplu, triunghiul din figura 16 se notează astfel: $\triangle ABC$.

Se numește *unghi* al triunghiului ABC de la vîrful A unghiul format de semidreptele AB și AC. La fel se definesc unghiurile triunghiului de la vîrfurile B și C.

Două segmente se numesc *egale* dacă ele au aceeași lungime. Două unghiuri se numesc *egale* dacă ele au aceeași măsură unghiulară în grade. Triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ se numesc *egale* dacă ele au:

$$\angle A=\angle A_1,\ \angle B=\angle B_1,\ \angle C=\angle C_1,$$
$$AB=A_1B_1,\ BC=B_1C_1,\ AC=A_1C_1.$$

Pe scurt aceasta se exprimă prin cuvintele: ***triunghiurile se numesc egale dacă au laturile corespunzătoare și unghiurile corespunzătoare egale.***

In figura 17 vedeți două triunghiuri egale: ABC și $A_1B_1C_1$. Ele au: $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, $\angle C=\angle C_1$, $AB=$

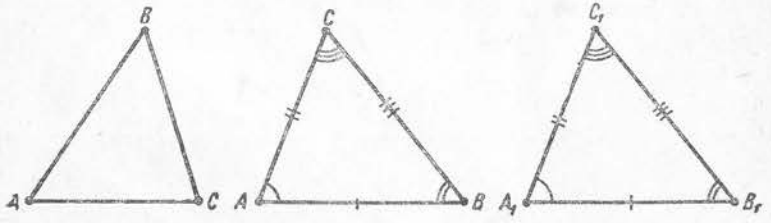


Fig. 16 Fig. 17

$=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$, $AC=A_1C_1$. Pe desen segmentele egale se notează de obicei cu una, două sau trei liniuțe, iar unghiurile egale — cu unul, două sau trei arce.

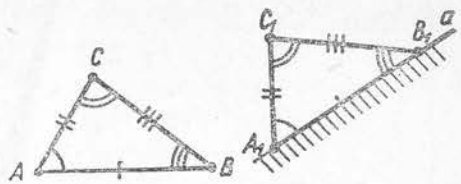


Fig. 18

Pentru notarea egalității triunghiurilor se folosește semnul obișnuit: $=$. Notația $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$ se citește: „Triunghiul ABC este egal cu triunghiul $A_1B_1C_1$". Aici are importanță ordinea în care se scriu vîrfurile triunghiului. Egalitatea $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$ înseamnă că $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, ..., iar egalitatea $\triangle ABC=\triangle B_1A_1C_1$ înseamnă cu totul altceva: $\angle A=\angle B_1$, $\angle B=\angle A_1$, ...

Problemă (43). Triunghiurile ABC și PQR sînt egale. Se știe că latura AB este egală cu 10 m, iar unghiul C este egal cu 90°. Cu ce sînt egale latura PQ și unghiul R? Argumentați răspunsul.

Rezolvare. Deoarece triunghiurile ABC și PQR sînt egale, ele au $\angle C=\angle R$, $AB=PQ$. Deci, $PQ=10$ m, $\angle R=90°$.

Fie date triunghiul ABC și semidreapta a (fig. 18). Deplasăm triunghiul ABC astfel încît vîrful A să coincidă cu originea semidreptei a, vîrful B să nimerească pe semidreapta a; iar vîrful C — pe semiplanul dat în raport cu semidreapta a și prelungirea ei. Notăm vîrfurile triunghiului nostru în această poziție nouă prin A_1, B_1, C_1. *Thiunghiul $A_1B_1C_1$ este egal cu triunghiul ABC.* Existența triunghiului $A_1B_1C_1$, egal cu triunghiul ABC și amplasat în modul indicat față de semidreapta dată a, o referim la proprietățile fundamentale ale celor mai simple figuri. Vom formula această proprietate astfel:

IV$_3$. *Oricare ar fi triunghiul, există un triunghi egal cu el în poziția dată față de semidreapta dată.*

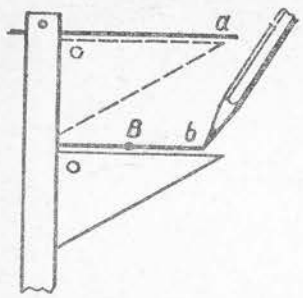


Fig. 19

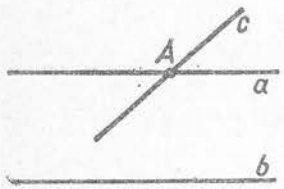


Fig. 20

8. PROPRIETATEA FUNDAMENTALĂ A DREPTELOR PARALELE

Două drepte pe plan se numesc *paralele* dacă ele nu se intersectează.

În figura 19 e arătat, cum se poate duce prin punctul dat B o dreaptă b, paralelă cu dreapta dată a, folosind rigla și echerul.

Pentru a nota paralelismul dreptelor se folosește semnul $\parallel$. Notația $a \parallel b$ se citește: „Dreapta a este paralelă cu dreapta b".

Proprietatea fundamentală a dreptelor paralele constă în următoarele:

V. ***Printr-un punct care nu aparține dreptei date în plan se poate duce cel mult o dreaptă paralelă cu dreapta dată.***

Problemă (45). Poate oare o dreaptă care intersectează una din două drepte paralele să n-o intersecteze pe cealaltă? Argumentați răspunsul.

Rezolvare. Fie a și b două drepte paralele, iar c o dreaptă, care intersectează dreapta a în punctul A (fig. 20). Dacă dreapta c n-ar intersecta dreapta b, prin punctul A ar trece două drepte care nu intersectează dreapta b: dreapta a și dreapta c. Însă în conformitate cu proprietatea dreptelor paralele aceasta e imposibil. Deci, dreapta c, intersectînd dreapta a, trebuie să intersecteze și dreapta b.

9. AXIOME, TEOREME ȘI DEMONSTRAȚII

Justețea afirmației despre proprietatea unei anumite figuri geometrice se stabilește prin raționament. Acest raționament se numește *demonstrație*. Propoziția ce exprimă o proprietate a unei figuri geometrice și se demonstrează, se numește *teoremă*. Dăm un exemplu.

Teorema 1.2. ***Dacă o dreaptă care nu trece prin nici unul din vîrfurile unui triunghi intersectează una din laturile lui ea intersectează numai una din celelalte două laturi.***

Demonstrație. Admitem că dreapta a nu trece prin nici unul din vîrfurile triunghiului ABC și intersectează latura AB (fig. 21). Dreapta a împarte planul în două semiplane. Punctele A și B sînt situate în diferite semiplane, deoarece segmentul AB se intersectează cu dreapta a. Punctul C este situat în unul din aceste semiplane. Dacă punctul C e situat într-un semiplan cu punctul A, segmentul AC nu se intersectează cu dreapta a, iar segmentul BC se intersectează cu această dreaptă (fig. 21, a). Dacă punctul C e situat în același semiplan cu punctul B, segmentul AC se intersectează cu dreapta a, iar segmentul BC — nu se intersectează (fig. 21, b). În ambele cazuri dreapta a intersectează numai unul din segmentele AC sau BC. Iată demonstrația.

Afirmațiile care figurează în formulele proprietăților fundamentale ale celor mai simple figuri nu se demonstrează și se numesc *axiome*. Cuvîntul „axiomă" provine de la cuvîntul grecesc *axios* și înseamnă o afirmație care nu trezește îndoieli.

La demonstrația teoremelor vom folosi proprietățile fundamentale ale celor mai simple figuri, adică axiomele, precum și proprietățiile deja demonstrate, adică teoremele demonstrate. Se interzice folosirea altor proprietăți ale figurilor, chiar dacă ele ne par evidente.

La demonstrația teoremelor avem voie să folosim desenul ca o înscriere geometrică a ceea ce se exprimă prin cuvinte. Se interzice să folosim în raționamente proprietățile figurilor care se văd pe desen dacă aceste proprietăți nu

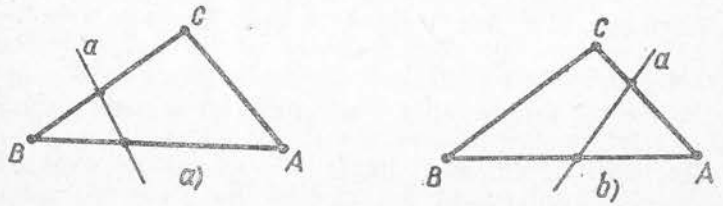


Fig. 21

39. Dați exemplu de teoremă și demonstrația ei.
40. Formulați axiomele de apartenență a punctelor și dreptelor.
41. Formulați axiomele de măsurare a segmentelor și unghiurilor.
42. Formulați axiomele de depunere a segmentelor și unghiurilor.
43. Formulați axioma de existență a unui triunghi egal cu cel dat.
44. În ce constă axioma dreptelor paralele?
45. Ce proprietăți ale figurilor geometrice se pot folosi la demonstrația teoremei?
46. Cum se folosește desenul la demonstrația teoremei?
47. Formularea unei teoreme constă din două părți. Care sînt ele?
48. Ce înseamnă a defini ceva? Dați definițiile egalității segmentelor, unghiurilor și triunghiurilor.

EXERCIȚII*

1. Duceți o dreaptă. Notați un punct oarecare A situat pe dreaptă și un punct B care nu e situat pe dreaptă.
2. Duceți două drepte a și b, care se intersectează. Notați punctul C de intersecție a dreptelor, un punct A pe dreapta a care nu aparține dreptei b, un punct D care nu se află pe nici una din dreptele a și b.
3. Notați pe o foaie de hîrtie două puncte. Duceți prin ele de mînă o dreaptă. Verificați cu ajutorul riglei corectitudinea construcției. Repetați exercițiul.
4. Notați pe o foaie de hîrtie două puncte. Notați acum din ochi un al treilea punct astfel încît el să fie situat pe dreapta care trece prin primele două puncte. Verificați cu ajutorul riglei corectitudinea construcției. Repetați exercițiul.
5. Duceți o dreaptă a. Notați pe dreaptă două puncte oarecare A și B. Notați un punct C astfel încît punctul A să fie situat între punctele B și C.
6. Duceți o dreaptă a. Notați pe dreaptă două puncte oarecare A și B. Notați un punct oarecare C al segmentului AB.
7. Cîte puncte de intersecție pot avea două segmente dacă

* Multe exerciții din acest manual sînt luate din manualele și culegerile de probleme din anii trecuți, în special din „Geometria" de A. P. Kiseliov și din „Culegere de probleme de geometrie" de N. A. Rîbkin.

ele nu sînt situate pe aceeași dreaptă? Argumentați răspunsul.
8. Duceți o dreaptă și notați un punct oarecare A care nu este situat pe această dreaptă. Notați două puncte B și C astfel încît segmentul AB să intersecteze dreapta, iar segmentul BC să n-o intersecteze.
9. Sînt date o dreaptă și trei puncte A, B, C care nu sînt situate pe această dreaptă. Se știe că segmentul AB intersectează dreapta, iar segmentul AC n-o intersectează. Intersectează oare dreapta segmentul BC? Argumentați răspunsul.
10. Sînt date o dreaptă și patru puncte A, B, C și D care nu sînt situate pe această dreaptă. Intersectează oare dreapta segmentul AD, dacă: 1) segmentele AB, BC și CD intersectează dreapta; 2) segmentele AC și BC intersectează dreapta, iar segmentul BD n-o intersectează; 3) segmentele AB și CD intersectează dreapta, iar segmentul BC n-o intersectează; 4) segmentele AB și CD nu intersectează dreapta, iar segmentul BC o intersectează; 5) segmentele AB, BC, CD nu intersectează dreapta; 6) segmentele AC, BC și BD intersectează dreapta? Argumentați răspunsul.
11. Sînt date cinci puncte și o dreaptă care nu trece prin nici unul din aceste puncte. Se știe că trei puncte sînt amplasate în același semiplan în raport cu această dreaptă, iar două puncte — în celălalt semiplan. Fiecare pereche de puncte este unită printr-un segment. Cîte segmente intersectează dreapta? Argumentați răspunsul.
12. Notați două puncte A și B. Duceți semidreapta AB.
13. Pe segmentul AB este luat punctul C. Printre semidreptele AB, AC, CB numiți perechi de semidrepte care coincid și de semidrepte complementare. Argumentați răspunsul.
14. Punctul M e situat pe dreapta CD între punctele C și D. Aflați lungimea segmentului CD, dacă: 1) $CM=2{,}5$ cm, $MD=3{,}5$ cm; 2) $CM=3{,}1$ dm, $MD=4{,}6$ dm; 3) $CM=12{,}3$ m, $MD=5{,}8$ m.
15. Notați pe o dreaptă două puncte. Notați din ochi mijlocul segmentului care unește aceste puncte. Verificați corectitudinea construcției prin măsurări cu ajutorul riglei. Repetați exercițiul.
16. Trei puncte A, B, C sînt situate pe aceeași dreaptă. Se știe că $AB=4{,}3$ cm, $AC=7{,}5$ cm, $BC=3{,}2$ cm. Punctul A poate fi oare situat între punctele B și C? Punctul C poate oare fi situat între punctele A și B? Care din trei puncte A, B, C este situat între celelalte două?

17. Punctele A, B, C sînt situate pe aceeaşi dreaptă. Punctul B aparţine oare segmentului AC dacă: 1) $AC=5$ cm, $BC=7$ cm; 2) $AC=9{,}1$ m, $AB=9{,}2$ m; 3) $AB=3$ dm, $BC=4$ dm, $AC=7$ dm? Argumentaţi răspunsul.
18. Punctele A, B, C sînt situate pe aceeaşi dreaptă. Punctul B poate oare împărţi punctele A şi C, dacă: 1) $AC=5$ cm, $AB=7$ cm; 2) $AC=7$ m, $BC=7{,}6$ m? Argumentaţi răspunsul.
19. Punctele A, B, C pot oare fi situate pe aceeaşi dreaptă dacă: $AB=1{,}8$ m, $AC=1{,}3$ m, $BC=3$ m? Argumentaţi răspunsul.
20. Distanţele de la punctul A la punctele B şi C sînt egale cu 5 cm şi 7 cm, iar distanţa dintre punctele B şi C este egală cu 6 cm. Pot oare fi situate pe aceeaşi dreaptă punctele A, B şi C? Argumentaţi răspunsul.
21. Pot oare fi situate pe aceeaşi dreaptă trei puncte A, B, C, dacă lungimea segmentului mai mare AB este mai mică decît suma lungimilor segmentelor AC şi BC? Argumentaţi răspunsul.
22. Punctele A, B, C sînt situate pe aceeaşi dreaptă. Aflaţi lungimea segmentului BC dacă $AB=2{,}7$ m, $AC=3{,}2$ m. Cîte soluţii are problema?
23. Pe segmentul AB e luat punctul C. Care segment este mai lung: AB sau AC? De ce?
24. Punctul X poate oare aparţine segmentului AB, dacă $AX>AB$? Argumentaţi răspunsul.
25. Pe segmentul AB cu lungimea de 15 m este notat punctul C. Aflaţi lungimile segmentelor AC şi BC, dacă: 1) segmentul AC e cu 3 m mai lung decît segmentul BC; 2) segmentul AC e de două ori mai lung decît segmentul BC; 3) punctul C este mijlocul segmentului AB; 4) lungimile segmentelor AC şi BC se raportă ca 2 : 3.
26. Dintr-un punct duceţi trei semidrepte arbitrare. Determinaţi din ochi unghiurile formate de aceste semidrepte. Verificaţi răspunsurile voastre, măsurînd unghiurile cu raportorul. Repetaţi exerciţiul.
27. Semidreapta a trece între laturile unghiului (cd). Aflaţi unghiul (cd), dacă: 1) $\angle(ac)=35°$, $\angle(ad)=75°$; 2) $\angle(ac)=57°$; $\angle(ad)=62°$; 3) $\angle(ac)=94°$, $\angle(ad)=85°$.
28. Semidreapta c poate oare trece între laturile unghiului (ab), dacă: 1) $\angle(ac)=30°$, $\angle(cb)=80°$, $\angle(ab)=50°$; 2) $\angle(ac)=100°$, $\angle(cb)=90°$?
29. Semidreapta c trece între laturile unghiului (ab). Care unghi e mai mare: $\angle(ab)$ sau $\angle(ac)$? De ce?
30. Semidreapta c trece între laturile unghiului (ab) egal

cu 60°. Aflaţi unghiurile (ac) şi (bc), dacă: 1) unghiul (ac) e cu 30° mai mare decît unghiul (bc); 2) unghiul (ac) e de două ori mai mare decît unghiul (bc); 3) semidreapta c împarte unghiul (ab) în jumătate; 4) măsurile unghiurilor (ac) şi (bc) în grade se raportă ca 2 : 3.
31. Duceţi o dreaptă. Notaţi pe ea un punct oarecare A. Notaţi din ochi un punct B al acestei drepte astfel, încît $AB=5$ cm. Verificaţi cu rigla exactitatea construcţiei punctului B. Repetaţi exerciţiul pentru: 1) $AB=3$ cm; 2) $AB=7$ cm; 3) $AB=10$ cm.
32. Construiţi din ochi unghiuri de 30°, 45°, 60°, 90°. Verificaţi cu raportorul exactitatea construcţiei. Repetaţi exerciţiul.
33. Există oare pe semidreapta AB un astfel de punct X diferit de B, încît $AX=AB$? Argumentaţi răspunsul.
34. Cîte puncte X diferite de B există pe dreapta AB astfel încît $AX=AB$? Argumentaţi răspunsul.
35. Pe semidreapta AB e depus segmentul AC mai mic decît segmentul AB. Care din trei puncte A, B, C e situat între celelalte două? Argumentaţi răspunsul.
36. Pe semidreapta AB e notat un punct C. Aflaţi lungimea segmentului BC, dacă: 1) $AB=1{,}5$ m, $AC=0{,}3$ m; 2) $AB=2$ cm, $AC=4{,}4$ cm.
37. Construiţi din ochi un triunghi cu laturile egale (triunghi echilateral). Verificaţi exactitatea construcţiei, măsurînd laturile.
38. Pe latura AB a triunghiului ABC e luat un punct D. Cu ce este egală latura AB a triunghiului, dacă $AD=5$ cm, iar $BD=6$ cm?
39. Pe latura AB a triunghiului ABC e luat un punct O. Cu ce este egal unghiul C al triunghiului, dacă: $\angle ACD=30°$, iar $\angle BCD=70°$?
40. Construiţi un triunghi oarecare. Construiţi din ochi un triunghi egal cu cel dat. Verificaţi corectitudinea construcţiei, măsurînd unghiurile şi laturile corespunzătoare. Repetaţi exerciţiul.
41. Triunghiurile ABC şi PQR sînt egale. Se ştie că $AB=5$ cm, $BC=6$ cm, $AC=7$ cm. Aflaţi laturile triunghiului PQR. Argumentaţi răspunsul.
42. Triunghiurile ABC şi PQR sînt egale. Unghiurile triunghiului al doilea sînt cunoscute $\angle P=40°$, $\angle Q=60°$, $\angle R=80°$. Aflaţi unghiurile triunghiului ABC.
43. Triunghiurile ABC şi PQR sînt egale. Se ştie că latura AB este egală cu 10 m, iar unghiul C este egal cu 90°.

Cu ce sînt egale latura PQ și unghiul R? Argumentați răspunsul.

44. Triunghiurile ABC, PQR și XYZ sînt egale. Se știe că $AB=5$ cm, $QR=6$ cm, $ZX=7$ cm. Aflați celelalte laturi ale fiecărui triunghi.
45. Poate oare o dreaptă care intersectează una din două drepte paralele să n-o intersecteze pe cealaltă? Argumentați răspunsul.
46. Sînt date două drepte care se intersectează. Se poate oare duce o a treia dreaptă paralelă cu fiecare din cele două drepte date?
47. Poate oare o dreaptă care nu trece prin nici un vîrf al unui triunghi să intersecteze fiecare latură a lui? De ce?
48. Sînt date patru puncte A, B, C și D. Se știe că punctele A, B, C sînt situate pe o dreaptă și punctele B, C, D de asemenea sînt situate pe o dreaptă. Demnostrați că toate cele patru puncte sînt situate pe aceeași dreaptă.
49. Sînt date patru drepte: a, b, c și d. Se știe că dreptele a, b, c se intersectează într-un punct și dreptele b, c, d de asemenea se intersectează într-un punct. Demonstrați că toate cele patru drepte date trec printr-un punct.
50. Sînt date punctele A, B, C și D care nu se află pe aceeași dreaptă. Dreaptă AB intersectează segmentul CD, iar dreapta CD intersectează segmentul AB. Demonstrați că segmentele AB și CD se intersectează.
51. Se dă un triunghi ABC. Pe latura AC e luat punctul B_1, iar pe latura BC — punctul A_1. Demonstrați că segmentele AA_1 și BB_1 se intersectează.
52. Segmentele AB și CD care nu se află pe o dreaptă se intersectează în punctul E. Demonstrați că segmentul AC nu intersectează dreapta BD.

§ 2. UNGHIURI

10. UNGHIURI MEGIEȘE

Definiție. Două unghiuri se numesc *megieșe* dacă ele au o latură comună, iar celelalte laturi sînt semidrepte complementare.

În figura 22 unghiurile (a_1b) și (a_2b) sînt megieșe. Ele au latura b comună, iar laturile a_1 și a_2 sînt semidrepte complementare.

Fie C un punct pe dreapta AB situat între punctele A și B, iar D un punct care nu e situat pe dreapta AB (fig. 23).

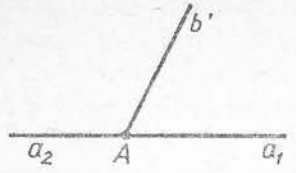


Fig. 22

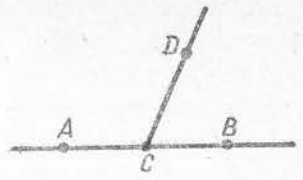


Fig. 23

Atunci unghiurile BCD și ACD sînt megieșe. Ele au latura CD comună. Laturile CA și CB sînt semidrepte complementare ale dreptei AB, deoarece originea C separă punctele A și B ale acestor semidrepte.

Teorema 2.1. ***Suma unghiurilor megieșe este egală cu 180°.***

Demonstrație. Fie (a_1b) și (a_2b) unghiurile megieșe date (fig. 22). Semidreapta b trece între laturile a_1 și a_2 ale unui unghi întins. De aceea suma unghiurilor (a_1b) și (a_2b) este egală cu unghiul întins, adică 180°. Teorema e demonstrată.

Din teorema 2.1 rezultă că ***dacă două unghiuri sînt egale, sînt egale și unghiurile megieșe cu ele.***

Problemă (3). Aflați unghiurile megieșe, dacă unul din ele e de două ori mai mare decît celălalt.

Rezolvare. Notăm prin x măsura în grade a celui mai mic unghi. Atunci măsura în grade a unghiului mai mare va fi $2x$.

Suma unghiurilor este egală cu 180°. Așadar,

$$x+2x=180°.$$

De aici $x=60°$. Deci, unghiurile noastre megieșe sînt egale cu 60° și 120°.

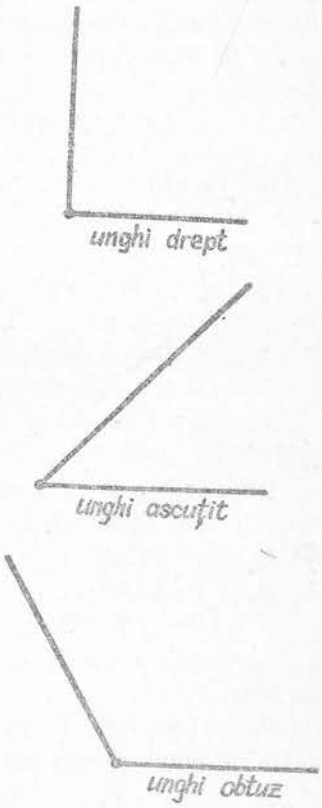


Fig. 24

Unghiul egal cu 90° se numeşte *unghi drept*. Din teorema 2.1 rezultă că *unghiul megieş cu un unghi drept este un unghi drept.*

Unghiul mai mic decît 90° se numeşte *unghi ascuţit*. Unghiul mai mare decît 90° şi mai mic decît 180° se numeşte *unghi obtuz*. Deoarece suma unghiurilor megieşe este egală cu 180°, unghiul megieş cu un unghi ascuţit este obtuz, iar unghiul megieş cu un unghi obtuz este ascuţit. În figura 24 sînt reprezentate trei feluri de unghiuri.

11. UNGHIURI OPUSE LA VÎRF

Definiţie. Două unghiuri se numesc *opuse la vîrf* dacă laturile unui unghi sînt semidrepte complementare ale laturilor celuilalt.

În figura 25 unghiurile (a_1b_1) şi (a_2b_2) sînt opuse la vîrf. Laturile a_2 şi b_2 ale unghiului al doilea sînt semidrepte complementare ale laturilor a_1 şi b_1 ale primului unghi.

Teorema 2.2. ***Unghiurile opuse la vîrf sînt egale.***

Demonstraţie. Fie (a_1b_1) şi (a_2b_2) unghiurile opuse la vîrf date (fig. 25). Unghiul (a_1b_2) este megieş cu unghiul (a_1b_1) şi cu unghiul (a_2b_2). De aici, conform teoremei 2.1, conchidem că fiecare din unghiurile (a_1b_1) şi (a_2b_2) completează unghiul (a_1b_2) pînă la 180°, adică unghiurile (a_1b_1) şi (a_2b_2) sînt egale. Teorema e demonstrată.

Problemă (8). Suma a două unghiuri care se obţin la intersecţia a două drepte este egală cu 50°. Aflaţi aceste unghiuri.

Rezolvare. Două unghiuri care se obţin la intersecţia a două drepte sînt sau megieşe, sau opuse la vîrf. Unghiurile date nu pot fi megieşe, deoarece suma lor este egală cu 50°, iar suma unghiurilor megieşe este egală cu 180°. Deci, ele sînt opuse la vîrf. Deoarece unghiurile opuse la vîrf sînt egale şi conform condiţiei suma lor este egală cu 50°, fiecare unghi este egal cu 25°.

Fig. 25

12. DREPTE PERPENDICULARE

Fie a şi b două drepte care se intersectează (fig. 26). Ele formează patru unghiuri. Fie α unul din aceste unghiuri. Atunci oricare din celelalte trei unghiuri va fi sau megieş cu α, sau opus la vîrf cu α. De aici rezultă că dacă unul din unghiuri este drept, celelalte unghiuri sînt de asemenea drepte. În acest caz spunem că dreptele se intersectează sub un unghi drept.

Definiţie. Două drepte se numesc *perpendiculare* dacă ele se intersectează sub unghi drept (fig. 27).

Perpendicularitatea dreptelor se notează prin semnul $\perp$. Notaţia $a \perp b$ se citeşte: „Dreapta a este perpendiculară pe dreapta b".

Definiţie. Se numeşte *perpendiculară* pe o dreaptă dată un segment de dreaptă perpendiculară pe cea dată care are drept una din extremităţi punctul lor de intersecţie. Această extremitate a segmentului se numeşte *piciorul* perpendicularei.

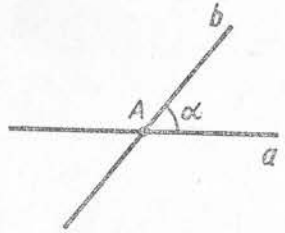


Fig. 26

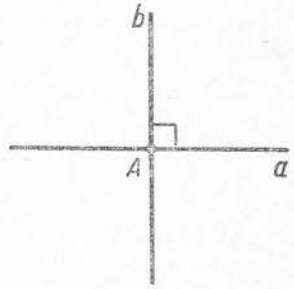


Fig. 27

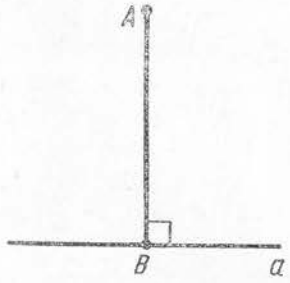


Fig. 28

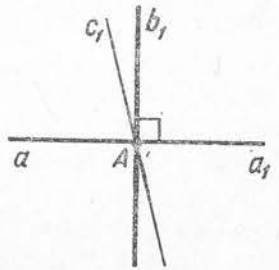


Fig. 29

Teorema 2.3. ***Prin fiecare punct al unei drepte se poate duce o dreaptă perpendiculară pe cea dată şi numai una singură.***

Demonstraţie. Fie a dreapta dată şi A un punct dat al ei. Prin a_1 notăm una din semidreptele dreptei a cu originea A (fig. 29). De la semidreapta a_1 depunem un unghi (a_1b_1) egal cu 90°. Atunci dreapta care conţine semidreapta b_1 va fi perpendiculară pe a.

Presupunem că există o altă dreaptă care de asemenea trece prin punctul A şi este perpendiculară pe dreapta a. Notăm prin c_1 semidreapta acestei drepte situată în acelaşi semiplan cu semidreapta b_1.

Unghiurile (a_1b_1) şi (a_1c_1) egale cu 90° fiecare sînt depuse de la semidreapta a_1 în acelaşi semiplan. Însă de la semidreapta a_1 în semiplanul dat se poate depune numai un unghi egal cu 90°. De aceea nu poate exista altă dreaptă care trece prin punctul A şi este perpendiculară pe dreapta a. Teorema e demonstrată.

13. DEMONSTRAŢIE PRIN REDUCERE LA ABSURD

Metoda de demonstraţie aplicată în teorema 2.3 se numeşte *demonstraţie prin reducere la absurd.* Această metodă de demonstraţie constă în aceea că mai întîi facem o presupunere opusă aceleia pe care o afirmă teorema. Apoi prin raţionamente în baza axiomelor şi teoremelor deja demonstrate ajungem la o concluzie care e în contradicţie sau cu condiţia teoremei, sau cu o axiomă, sau cu o teoremă demonstrată anterior. De aici conchidem că presupunerea noastră a fost falsă şi, deci, afirmaţia teoremei este justă.

Vom explica aceasta, luînd drept exemplu demonstraţia teoremei 2.3. Teorema afirmă că prin fiecare punct al dreptei se poate duce numai *o singură* dreaptă perpendiculară pe ea. Presupunînd că pot fi duse două drepte de acestea, am ajuns la concluzia că de la semidreapta dată în semiplanul dat pot fi depuse două unghiuri de aceeaşi măsură în grade (90°). Aceasta însă contrazice axioma depunerii unghiurilor. Conform acestei axiome de la semidreapta dată în semiplanul dat se poate depune numai *un singur unghi* de măsură în grade dată.

14. UNGHIURI DEPUSE INTR-UN SEMIPLAN

Problemă (13). Unghiul (ab) e mai mic decît unghiul (ac). Poate oare trece semidreapta c între laturile unghiului (ab)?

Rezolvare. Dacă semidreapta c trece între laturile unghiului (ab) conform proprietăţii măsurării unghiurilor trebuie să avem:

$$\angle(ac)+\angle(cb)=\angle(ab).$$

Însă aceasta e imposibil, deoarece conform condiţiei unghiul (ac) e mai mare decît unghiul (ab). Aşadar, semidreapta c nu poate trece între laturile unghiului (ab).

Teorema 2.4. ***Dacă de la o semidreaptă dată într-un semiplan se depun două unghiuri latura unghiului mai mic, diferită de semidreapta dată, trece între laturile unghiului mai mare.***

Demonstraţie. Fie $\angle(ab)$ şi $\angle(ac)$ unghiurile depuse de la semidreapta dată a într-un semiplan şi fie unghiul (ab) mai mic decît unghiul (ac) (fig. 30). Să demonstrăm că semidreapta b trece între laturile unghiului (ac).

Notăm prin a_1 semidreapta complementară a semidreptei a. Fie pe semidreapta a un punct oarecare A, pe semidreapta a_1 un punct B şi pe semidreapta c un punct C.

Dreapta care conţine semidreapta b intersectează latura AB a triunghiului ABC, deci, intersectează şi una din celelalte două laturi ale lui: AC sau BC. În acest caz anume semidreapta b intersectează una din aceste laturi, deoarece semidreapta complementară se află în alt semiplan. Dacă semidreapta b intersectează latura AC, ea trece între laturile unghiuli (ac). Dacă semidreapta b intersectează latura BC, ea trece între laturile unghiului (a_1c).

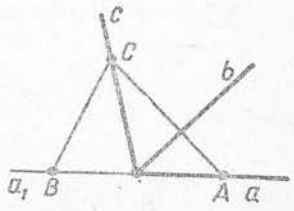


Fig. 30

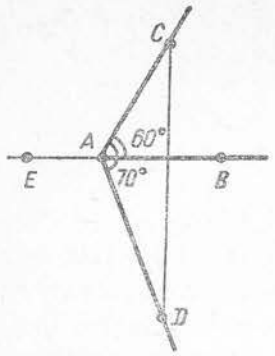


Fig. 31

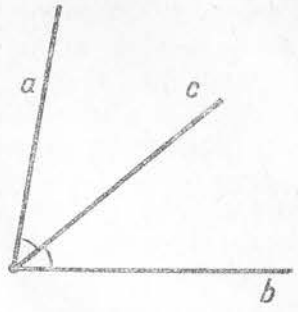


Fig. 32

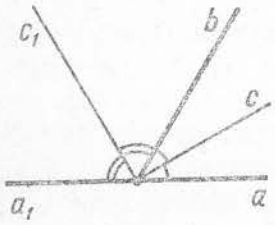


Fig. 33

Deoarece unghiul (ab) e mai mic decît unghiul (ac), conform proprietății unghiurilor megieșe unghiul (a_1b) e mai mare decît unghiul (a_1c). De aceea semidreapta b nu poate trece între laturile unghiului (a_1c). Deci, ea trece între laturile unghiului (ac). Teorema e demonstrată.

Din această teoremă rezultă că *dacă unghiurile (ab) și (ac) sînt depuse într-un semiplan de la semidreapta a unghiul (bc) este egal cu diferența unghiurilor (ac) și (ab).*

Problemă (16). De la semidreapta AB în semiplane diferite sînt depuse unghiurile $\angle BAC=60°$ și $\angle BAD=70°$. Aflați unghiul CAD.

Rezolvare. Deoarece punctele C și D sînt situate în semiplane diferite în raport cu dreapta AB, segmentul CD intersectează această dreaptă (fig. 31). Deci, semidreapta AB sau semidreapta complementară AE trece între laturile unghiului CAD. De aceea unghiul CAD este egal sau cu suma unghiurilor BAC și BAD, sau cu suma unghiurilor megieșe cu ele EAC și EAD. În primul caz el este egal cu

$$60°+70°=130°$$

iar în al doilea caz cu

$$(180°-60°)+(180°-70°)=230°.$$

Cazul al doilea e imposibil, deoarece măsura unghiului în grade nu depășește 180°. Așadar, unghiul CAD este egal cu 130°.

Definiție. Se numește *bisectoare* a unui unghi semidreapta care pornește din vîrful lui, trece între laturile lui și împarte unghiul în jumătate.

În figura 32 vedeți unghiul (ab). Semidreapta c pornește din vîrful unghiului, trece între laturile lui și împarte unghiul în jumătate: $\angle(ac)=\angle(bc)$. Semidreapta c este bisectoarea unghiului (ab).

Problemă (20). Aflați unghiul dintre bisectoarele a două unghiuri megieșe.

Rezolvare. Fie (ab) și (a_1b) unghiuri megieșe și c, c_1 bisectoarele lor (fig. 33). Notăm prin x unghiul (ab). Exprimăm prin x unghiurile (ac) și (ac_1). Aceste unghiuri sînt depuse în același semiplan de la semidreapta a, deci, unghiul (cc_1) este egal cu diferența acestor unghiuri.

Atunci: $\angle(ac)=\frac{x}{2}$, $\angle(ac_1)=180°-\angle(a_1c_1)=180°-\frac{1}{2}\angle(a_1b)=180°-\frac{1}{2}(180°-\angle(ab))=180°-\frac{1}{2}(180°-x)=90°+\frac{x}{2}$,

$$\angle(cc_1)=\angle(ac_1)-\angle(ac)=90°+\frac{x}{2}-\frac{x}{2}=90°.$$

ÎNTREBĂRI PENTRU REPETARE

1. Care unghiuri se numesc megieșe?
2. Explicați de ce în figura 23 unghiurile DCA și DCB sînt megieșe.
3. Demonstrați: suma a două unghiuri megieșe este egală cu 180°.
4. Demonstrați: dacă două unghiuri sînt egale unghiurile megieșe cu ele sînt de asemenea egale.
5. Care unghi se numește drept (ascuțit, obtuz)?
6. Demonstrați: unghiul megieș cu un unghi drept este de asemenea un unghi drept.
7. Care unghiuri se numesc opuse la vîrf?
8. Demonstrați: unghiurile opuse la vîrf sînt egale.
9. Demonstrați: dacă la intersecția a două drepte un unghi este drept celelalte trei unghiuri sînt de asemenea drepte.

10. Care drepte se numesc perpendiculare? Ce semn se foloseşte pentru a nóta perpendicularitatea dreptelor?
11. Ce este o perpendiculară pe o dreaptă?
12. Demonstraţi: prin orice punct al unei drepte se poate duce o dreaptă perpendiculară pe dreapta dată şi numai una singură.
13. Explicaţi în ce constă demonstraţia prin reducere la absurd.
14. Demonstraţi teorema despre unghiurile situate într-un semiplan.
15. Ce se numeşte bisectoare a unghiului?

EXERCIŢII

1. Aflaţi unghiurile megieşe cu unghiurile de: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°; 4) 90°.
2. Pot oare două unghiuri megieşe să fie: 1) ascuţite; 2) obtuze; 3) drepte? Argumentaţi răspunsul.
3. Aflaţi unghiurile megieşe, dacă unul din ele e de două ori mai mare decît celălalt.
4. Aflaţi unghiurile megieşe dacă: 1) unul din ele e cu 30° mai mare decît celălalt; 2) diferenţa lor este egală cu 40°; 3) unul din ele e de trei ori mai mic decît celălalt.
5. Aflaţi unghiurile megieşe, dacă măsurile lor în grade se raportă ca: 1) 2 : 3; 2) 3 : 7; 3) 11 : 25; 4) 22 : 23.
6. Unul din unghiurile care se obţin la intersecţia a două drepte, este egal cu 30°. Cu ce sînt egale celelalte unghiuri?
7. Cu ce este egal un unghi, dacă suma celor două unghiuri megieşe cu el este egală cu 100°?
8. Suma a două unghiuri care se obţin la intersecţia a două drepte este egală cu 50°. Aflaţi aceste unghiuri.
9. Unul din unghiurile care se obţin la intersecţia a două drepte e de 4 ori mai mare decît altul. Aflaţi aceste unghiuri.
10. Unul din unghiurile care se obţin la intersecţia a două drepte e cu 50° mai mic decît altul. Aflaţi aceste unghiuri.
11. Aflaţi unghiurile care se obţin la intersecţia a două drepte dacă suma a trei din ele este egală cu 270°.
12. Demonstraţi: dacă trei din cele patru unghiuri care se obţin la intersecţia a două drepte sînt egale, dreptele sînt perpendiculare.
13. Unghiul (ab) e mai mic decît unghiul (ac). Poate oare trece semidreapta c între laturile unghiului (ab)?

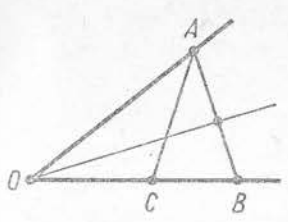


Fig. 34

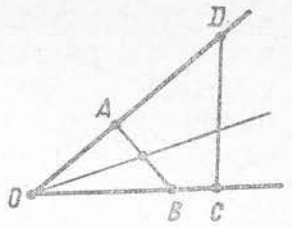


Fig. 35

14. Din vîrful unghiului întins (aa_1) într-un semiplan sînt duse semidreptele b şi c. Cu ce este egal unghiul (bc), dacă: 1) $\angle(ab)=50°$; $\angle(ac)=70°$; 2) $\angle(a_1b)=50°$, $\angle(ac)=70°$; 3) $\angle(ab)=60°$, $\angle(a_1c)\neq 30°$?
15. Din vîrful unghiului întins (aa_1) într-un semiplan sînt duse semidreptele b şi c. Se ştie că $\angle(ab)=60°$, iar $\angle(ac)=30°$. Aflaţi unghiurile (a_1b), (a_1c) şi (bc).
16. De la semidreapta AB în diferite semiplane sînt duse unghiurile $\angle BAC=60°$ şi $\angle BAD=70°$. Aflaţi unghiul CAD.
17. De la semidreapta AB în diferite semiplane sînt depuse unghiurile BAC şi BAD. Aflaţi unghiul CAD, dacă: 1) $\angle BAC=80°$, $\angle BAD=170°$; 2) $\angle BAC=87°$, $\angle BAD=98°$; 3) $\angle BAC=140°$, $\angle BAD=30°$.
18. Cu ce este egal unghiul dintre bisectoare şi o latură a unghiului dat egal cu: 1) 30°; 2) 52°; 3) 172°?
19. Aflaţi unghiul, dacă bisectoarea lui formează cu o latură un unghi de: 1) 60°; 2) 75°; 3) 89°.
20. Aflaţi unghiul dintre bisectoarele unghiurilor megieşe.
21. Demonstraţi că bisectoarele unghiurilor opuse la vîrf sînt situate pe o dreaptă.
22. Aflaţi unghiul dintre bisectoarea şi prelungirea unei laturi a unui unghi egal cu: 1) 50°; 2) 90°; 3) 150°.
23. Demonstraţi: dacă semidreapta, care porneşte din vîrful unui unghi intersectează un segment AB cu extremităţile pe laturile unghiului ea intersectează: 1) segmentul AC cu extremităţile pe laturile unghiului (fig. 34); 2) orice alt segment CD cu extremităţile pe laturile acestui unghi (fig. 35).

§ 3. CRITERIILE DE EGALITATE A TRIUNGHIURILOR

15. CRITERIUL ÎNTÎI DE EGALITATE A TRIUNGHIURILOR

Teorema 3.1 (criteriul de egalitate a triunghiurilor după două laturi şi unghiul dintre ele). ***Dacă două laturi şi unghiul dintre ele ale unui triunghi sînt egale respectiv cu două laturi şi unghiul dintre ele ale altui triunghi astfel de triunghiuri sînt egale.***

Demonstraţie. Admitem că triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ au $\angle A=\angle A_1$, $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$ (fig. 36). Să demonstrăm că triunghiurile sînt egale, adică să demonstrăm că ele au

$$\angle B=\angle B_1,\ \angle C=\angle C_1,\ BC=B_1C_1.$$

Conform axiomei de existenţă a unui triunghi egal cu cel dat există un triunghi $A_1B_2C_2$ egal cu triunghiul ABC vîrful B_2 al căruia se află pe semidreapta A_1B_1, iar vîrful C_2 împreună cu vîrful C_1 se află într-un semiplan în raport cu dreapta A_1B_1. Deoarece $A_1B_1=A_1B_2$ în virtutea axiomei de depunere a segmentelor punctul B_2 coincide cu punctul B_1. Deoarece $\angle B_1A_1C_1=\angle B_2A_1C_2$ după axioma de depunere a unghiurilor, semidreapta A_1C_2 coincide cu semidreapta A_1C_1. Şi întrucît $A_1C_1=A_1C_2$ vîrful C_2 coincide cu vîrful C_1. Aşadar, triunghiul $A_1B_1C_1$ coincide cu triunghiul $A_1B_2C_2$, deci este egal cu triunghiul ABC. Teorema e demonstrată.

Problemă (1). Segmentele AB şi CD se intersectează în punctul O care este mijlocul fiecăruia din ele. Cu ce este egal segmentul BD, dacă segmentul $AC=10$ m?

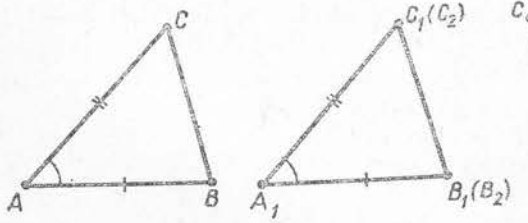


Fig. 36

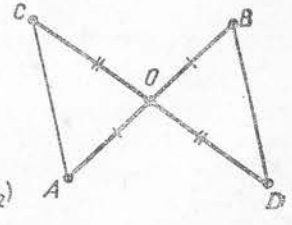


Fig. 37

Rezolvare. Triunghiurile AOC şi BOD sînt egale conform criteriului întîi de egalitate a triunghiurilor (fig. 37). Ele au unghiurile AOC şi BOD egale ca unghiuri opuse la vîrf, iar $OA=OB$ şi $OC=OD$, deoarece punctul O este mijlocul segmentelor AB şi CD. Din egalitatea triunghiurilor AOC şi BOD rezultă egalitatea laturilor lor AC şi BD. Dar deoarece conform condiţiei problemei $AC=10$ m, avem $BD=10$ m.

16. CRITERIUL AL DOILEA DE EGALITATE A TRIUNGHIURILOR

Teorema 3.2 (criteriul de egalitate a triunghiurilor după o latură şi unghiurile alăturate ei). ***Dacă o latură şi unghiurile alăturate ei ale unui triunghi sînt egale respectiv cu o latură şi unghiurile alăturate ei ale altui triunghi astfel de triunghiuri sînt egale.***

Demonstraţie. Fie ABC şi $A_1B_1C_1$ două triunghiuri în care $AB=A_1B_1$, $\angle A=\angle A_1$ şi $\angle B=\angle B_1$ (fig. 38). Să demonstrăm că triunghiurile sînt egale, adică să demonstrăm că

$$AC=A_1C_1,\ BC=B_1C_1 \text{ şi } \angle C=\angle C_1.$$

Conform axiomei de existenţă a unui triunghi egal cu cel dat există un triunghi $A_1B_2C_2$, egal cu triunghiul ABC, vîrful B_2 al căruia e situat pe semidreapta A_1B_1, iar vîrful C_2 şi vîrful C_1 sînt situate în acelaşi semiplan în raport cu dreapta A_1B_1. Deoarece $A_1B_2=A_1B_1$, vîrful B_2 coincide cu vîrful B_1. Întrucît $\angle B_1A_1C_2=\angle B_1A_1C_1$ şi $\angle A_1B_1C_2=\angle A_1B_1C_1$, conform axiomei de depunere a unghiurilor, semidreapta A_1C_1 coincide cu semidreapta A_1C_2, iar semidreapta B_1C_1 coincide cu semidreapta B_1C_2. De aici rezultă că vîrful C_2 coincide cu vîrful C_1.

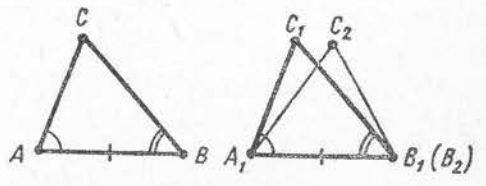


Fig. 38

Așa ar triunghiul $A_1B_1C_1$ coincide cu triunghiul $A_1B_2C_2$, deci, este egal cu triunghiul ABC. Teorema e demonstrată.

17. TRIUNGHIUL ISOSCEL

Triunghiul care are două laturi egale se numește *isoscel*. Aceste laturi egale se numesc *laturi laterale*, iar a treia latură se numește *bază* a triunghiului.

În figura 39 este reprezentat un triunghi isoscel ABC. El are laturile laterale AC și BC, iar baza AB.

Teorema 3.3 ***Într-un triunghi isoscel unghiurile de la bază sînt egale.***

Demonstrație. Fie ABC un triunghi isoscel cu baza AB (fig. 39). Să demonstrăm că el are $\angle A=\angle B$. Triunghiul CAB este egal cu triunghiul CBA conform criteriului întîi de egalitate a triunghiurilor. Într-adevăr, $CA=CB$, $CB=CA$, $\angle C=\angle C$. Din egalitatea triunghiurilor rezultă că $\angle A=\angle B$. Teorema e demonstrată.

Triunghiul care are toate laturile egale se numește *echilateral*.

Problemă (13). Demonstrați că într-un triunghi echilateral toate unghiurile sînt egale.

Rezolvare. Fie ABC un triunghi dat cu laturile egale: $AB=BC=CA$ (fig. 40). Deoarece $AB=BC$, acest triunghi este isoscel cu baza AC. Conform teoremei 3.3 $\angle C=\angle A$. Deoarece $BC=CA$, triunghiul ABC este isoscel cu baza AB. În conformitate cu teorema 3.3 $\angle A=\angle B$. Așadar, $\angle C=\angle A=\angle B$, adică toate unghiurile triunghiului sînt egale.

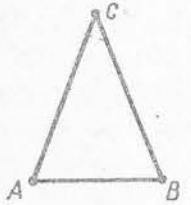


Fig. 39

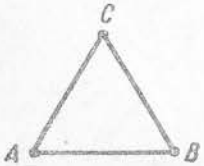


Fig. 40

Teorema 3.4. ***Dacă într-un triunghi două unghiuri sînt egale, acest triunghi este isoscel.***

Demonstrație. Fie ABC un triunghi în care $\angle A=\angle B$ (vezi fig. 39).

Să demonstrăm că el este isoscel cu baza AB. Triunghiul ABC este egal cu triunghiul ABC conform criteriului al doilea de egalitate a

triunghiurilor. Într-adevăr, $AB=BA$, $\angle B=\angle A$, $\angle A=\angle B$. Din egalitatea triunghiurilor rezultă că $AC=BC$. Teorema e demonstrată.

Teorema 3.4 se numește *reciprocă* teoremei 3.3. Concluzia teoremei 3.3 este condiția teoremei 3.4, iar condiția teoremei 3.3 este concluzia teoremei 3.4. Nu orice teoremă are teorema sa reciprocă, adică dacă teorema dată este justă, teorema reciprocă poate fi falsă. Să explicăm aceasta, luînd drept exemplu teorema despre unghiuri opuse la vîrf. Această teoremă poate fi formulată astfel: dacă două unghiuri sînt opuse la vîrf, ele sînt egale. Teorema reciprocă ar fi următoarea: dacă două unghiuri sînt egale, ele sînt opuse la vîrf. Aceasta, bineînțeles, nu este adevărat. Două unghiuri egale nu sînt neapărat opuse la vîrf.

Problemă (14). Formulați și demonstrați teorema reciprocă afirmației problemei 13.

Rezolvare. În problema 13 condiția constă în faptul că triunghiul este echilateral, adică toate laturile lui sînt egale, iar concluzia constă în faptul că toate unghiurile triunghiului sînt egale. De aceea teorema reciprocă trebuie formulată astfel. Dacă într-un triunghi toate unghiurile sînt egale, sînt egale și toate laturile lui. Să demonstrăm această teoremă. Fie ABC un triunghi cu unghiurile egale: $\angle A=\angle B=\angle C$. Deoarece $\angle A=\angle B$, conform teoremei 3.4 avem $AC=CB$. Deoarece $\angle B=\angle C$, conform teoremei 3.4 avem $AC=AB$. Așadar, $AB=AC=CB$ adică toate laturile triunghiului sînt egale.

18. MEDIANA, BISECTOAREA ȘI ÎNĂLȚIMEA TRIUNGHIULUI

Se numește *înălțime* a triunghiului coborîtă din vîrful dat perpendiculara dusă din acest vîrf pe dreapta care conține latura opusă a triunghiului. În figura 41 vedeți două triunghiuri în care sînt duse înălțimile din vîrfurile B și B_1. În figura 41, *a* piciorul înălțimii e situat pe latura triunghiului, în figura 41, *b* — pe prelungirea laturii triunghiului.

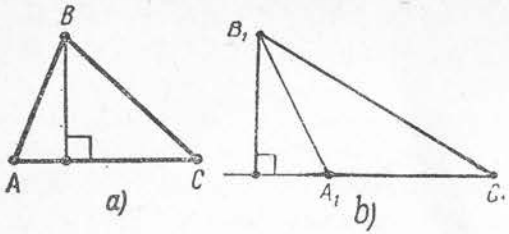


Fig. 41

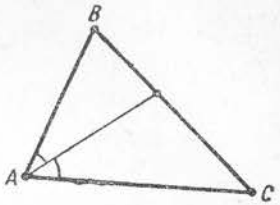


Fig. 42

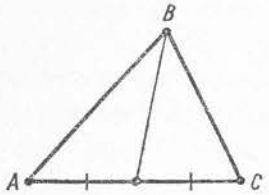


Fig. 43

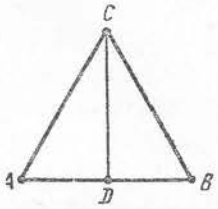


Fig. 44

Se numeşte *bisectoare* a triunghiului dusă din vîrful dat segmentul bisectoarei unghiului triunghiului care uneşte acest vîrf cu punctul de pe latura opusă (fig. 42).

Se numeşte *mediană* a triunghiului dusă din vîrful dat segmentul care uneşte acest vîrf cu mijlocul laturii opuse a triunghiului (fig. 43).

Teorema 3.5. ***Într-un triunghi isoscel mediana dusă la bază este bisectoare şi înălţime.***

Demonstraţie. Fie ABC un triunghi isoscel cu baza AB (fig. 44). Fie CD mediana dusă la bază. Triunghiurile CAD şi CBD sînt egale conform criteriului întîi de egalitate a triunghiurilor. (Ele au laturile AC şi BC egale, fiindcă triunghiul ABC este isoscel. Unghiurile CAD şi CBD sînt egale conform teoremei 3.3. Laturile AD şi BD sînt egale, deoarece D este mijlocul segmentului AB.).

Din egalitatea triunghiurilor rezultă egalitatea unghiurilor: $\angle ACD = \angle BCD$, $\angle ADC = \angle BDC$. Deoarece unghiurile ACD şi BCD sînt egale, CD e bisectoare. Întrucît unghiurile ADC şi BDC sînt unghiuri megieşe şi egale, ele sînt drepte, de aceea CD este înălţime a triunghiului. Teorema e demonstrată.

Problemă (27). Demonstraţi că bisectoarea unui triunghi isoscel dusă din vîrful opus bazei este mediană şi înălţime.

Rezolvare. Fie ABC un triunghi isoscel cu baza AB şi bisectoarea CD (vezi fig. 44). Triunghiurile ACD şi BCD sînt egale conform criteriului al doilea. (Aceste triunghiuri au laturile AC şi BC egale ca laturi laterale ale triunghiului isoscel ABC, unghiurile de la vîrful C sînt egale, fiindcă CD este bisectoarea unghiului ACB, iar unghiurile de la vîrfurile A şi B sînt egale ca unghiuri de la baza triunghiului isoscel ABC.). Din egalitatea triunghiurilor rezultă egalitatea laturilor AD şi BD. Deci, CD este mediana triunghiului ABC. Conform teoremei 3.5 ea este şi înălţime.

19. CRITERIUL AL TREILEA DE EGALITATE A TRIUNGHIURILOR

Teorema 3.6 (criteriul de egalitate a triunghiurilor după trei laturi). ***Dacă trei laturi ale unui triunghi sînt egale respectiv cu trei laturi ale altui triunghi aceste triunghiuri sînt egale.***

Demonstraţie. Fie ABC şi $A_1B_1C_1$ două triunghiuri care au $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$ (fig. 45). Să demonstrăm că aceste triunghiuri sînt egale.

După axioma de existenţă a unui triunghi, egal cu cel dat, există un triunghi $A_1B_1C_2$ egal cu triunghiul ABC al cărui vîrf C_2 e situat cu vîrful C_1 într-un semiplan în raport cu dreapta A_1B_1 (fig. 45).

Presupunem că vîrful C_2 nu aparţine nici semidreptei A_1C_1, nici semidreptei B_1C_1. Fie D mijlocul segmentului C_1C_2. Triunghiurile $A_1C_1C_2$ şi $B_1C_1C_2$ sînt isoscele cu baza comună C_1C_2. Conform teoremei 3.5 medianele lor A_1D şi B_1D sînt înălţimi. Deci, dreptele A_1D şi B_1D sînt perpendiculare pe dreapta C_1C_2. Dar aceasta nu e posibil, deoa-

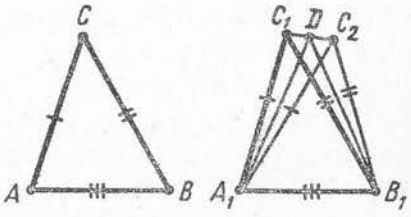


Fig. 45

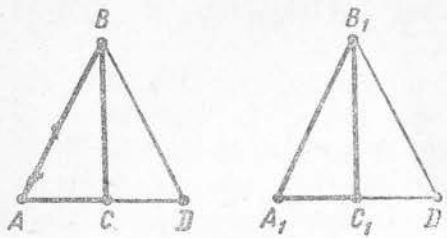


Fig. 46

rece prin-un punct al dreptei se poate duce numai o singură dreaptă perpendiculară pe ea (teorema 2.3). Am ajuns la o contradicție. Deci, vîrful C_2 aparține sau semidreptei A_1C_1, sau semidreptei B_1C_1. In primul caz punctul C_2 coincide cu C_1, deoarece $A_1C_1=AC$. Dar aceasta înseamnă că triunghiul ABC este egal cu triunghiul $A_1B_1C_1$. La fel ajungem la concluzia despre egalitatea triunghiurilor în cazul al doilea. Teorema e demonstrată.

P r o b l e m ă (28). Triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ au: $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $\angle C=\angle C_1=90°$. Demonstrați că $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$.

R e z o l v a r e. Pe prelungirea laturii AC depunem segmentul CD, egal cu AC (fig. 46). Triunghiurile ABC și DBC sînt egale conform criteriului întîi. Ele au unghiuri drepte la vîrful C și, deci, egale, latura BC e comună, iar laturile AC și CD sînt egale prin construcție. Din egalitatea triunghiurilor rezultă egalitatea laturilor AB și DB.

Pe prelungirea laturii A_1C_1 depunem segmentul C_1D_1 egal cu A_1C_1. Ca și pentru triunghiurile ABC și DBC demonstrăm că triunghiurile $A_1B_1C_1$ și $D_1B_1C_1$ sînt egale. Din egalitatea triunghiurilor rezultă egalitatea laturilor: A_1B_1 și D_1B_1.

Aplicînd criteriul al treilea, conchidem că triunghiurile ABD și $A_1B_1D_1$ sînt egale. Ele au: $AB=A_1B_1$ conform condiției, $\angle BD=\angle B_1D_1$, deoarece $BD=AB$, iar $B_1D_1=A_1B_1$, în sfîrșit, $AD=A_1D_1$, deoarece $AC=A_1C_1$. Din egalitatea triunghiurilor ABD și $A_1B_1D_1$ urmează egalitatea unghiurilor lor: $\angle A=\angle A_1$.

În virtutea criteriului întîi conchidem că triunghiurile inițiale ABC și $A_1B_1C_1$ sînt egale. Ele au $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$ conform condiției și $\angle A=\angle A_1$ în conformitate cu cele demonstrate.

INTREBĂRI PENTRU REPETARE

1. Formulați și demonstrați criteriul întîi de egalitate a triunghiurilor.
2. Formulați și demonstrați criteriul al doilea de egalitate a triunghiurilor.
3. Ce numim triunghi isoscel? Care laturi ale triunghiului isoscel se numesc laturi laterale? Care latură se numește bază?
4. Demonstrați că într-un triunghi isoscel unghiurile de la bază sînt egale.
5. Ce numim triunghi echilateral?
6. Demonstrați că dacă într-un triunghi două unghiuri sînt egale, acest triunghi este isoscel.
7. Explicați ce este teorema reciprocă. Dați un exemplu. Oare pentru orice teoremă este justă reciproca ei?
8. Ce se numește înălțime a triunghiului?
9. Ce se numește bisectoare a triunghiului?
10. Ce se numește mediană a triunghiului?
11. Demonstrați că într-un triunghi isoscel mediana dusă la bază este bisectoare și înălțime.
12. Demonstrați criteriul al treilea de egalitate a triunghiurilor.

EXERCIȚII

1. Segmentele AB și CD se intersectează în punctul O care este mijlocul fiecăruia din ele. Cu ce este egal segmentul BD dacă segmentul $AC=10$ m?
2. Prin mijlocul segmentului AB este dusă o dreaptă perpendiculară pe dreapta AB. Demonstrați că orice punct al acestei drepte este egal depărtat de punctele A și B.
3. Din vîrful C al triunghiului isoscel ABC cu baza AB sînt depuse segmente egale: CA_1 — pe latura CA și CB_1 — pe latura CB. Demonstrați egalitatea triunghiurilor: 1) CAB_1 și CBA_1; 2) ABB_1 și BAA_1.
4. Pe baza AB a triunghiului isoscel ABC sînt date punctele A_1 și B_1. Se știe că $AB_1=BA_1$. Demonstrați că triunghiurile AB_1C și BA_1C sînt egale.
5. Pe latura AB a triunghiului ABC s-a luat punctul D, iar pe latura A_1B_1 a triunghiului $A_1B_1C_1$ — punctul D_1. Se știe că triunghiurile ADC și $A_1D_1C_1$ sînt egale și segmentele DB și D_1B_1 sînt egale. Demonstrați egalitatea triunghiurilor ABC și $A_1B_1C_1$.
6. Fie A și B două puncte astfel încît între ele nu putem trece după o dreaptă (fig. 47). Pentru a măsura pe te-

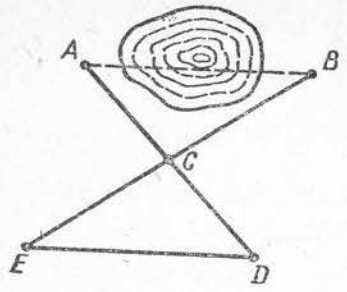


Fig. 47

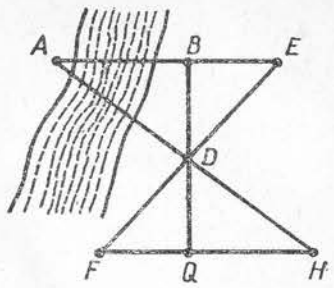


Fig. 48

ren distanța dintre ele alegem un punct C din care putem ajunge după drepte și în punctul A, și în punctul B și din care se văd aceste puncte. Jalonăm* distanțele AC și BC, le prelungim dincolo de punctul C și măsurăm $CD=AC$ și $EC=CB$. Atunci segmentul ED este egal cu distanța căutată. Explicați de ce.

7. Pentru a măsura pe teren distanța dintre două puncte A și B, unul (punctul A) fiind inaccesibil, jalonăm direcția segmentului AB (fig. 48) și pe prelungirea lui măsurăm un segment arbitrar BE. Alegem pe teren un punct D din care se vede punctul A și se poate ajunge la punctele B și E. Jalonăm dreptele BDQ și EDF și măsurăm $ED=DE$ și $DQ=BD$. Mergem apoi pe dreapta FQ, privind la punctul A, pînă găsim punctul H care e situat pe dreapta AD. Atunci segmentul HQ este egal cu distanța căutată. Demonstrați.
8. Segmentele AB și CD se intersectează în punctul O. Demonstrați egalitatea triunghiurilor ACO și DBO dacă se știe că unghiul ACO este egal cu unghiul DBO și $BO=CO$.
9. Segmentele AC și BD se intersectează în punctul O. Demonstrați egalitatea triunghiurilor BAO și DCO, dacă se știe că unghiul BAO este egal cu unghiul DCO și $AO=CO$.
10. Perimetrul (suma lungimilor laturilor) unui triunghi isoscel este egal cu 1 m, iar baza este egală cu 0,4 m. Aflați lungimea laturii laterale.
11. Perimetrul unui triunghi isoscel este egal cu 7,5 m, iar latura laterală este egală cu 2 m. Aflați baza.
12. Perimetrul unui triunghi isoscel este egal cu 15,6 m. Aflați laturile lui dacă: 1) baza e cu 3 m mai mică decît latura laterală; 2) baza e cu 3 m mai mare decît latura laterală.
13. Demonstrați că într-un triunghi echilateral toate unghiurile sînt egale.
14. Formulați și demonstrați teorema reciprocă afirmației problemei 13.
15. Pe laturile AC și BC ale triunghiului ABC s-au luat punctele C_1 și C_2. Demonstrați, că triunghiul ABC este isoscel, dacă triunghiurile ABC_1 și BAC_2 sînt egale.
16. Triunghiurile ACC_1 și BCC_1 sînt egale. Vîrfurile lor A și B sînt situate de diferite părți ale dreptei CC_1. Demonstrați că triunghiurile ABC și ABC_1 sînt isoscele.
17. Demonstrați că mijlocurile laturilor uniu triunghi isoscel sînt vîrfuri ale unui triunghi de asemenea isoscel.
18. Demonstrați că mijlocurile laturilor unui triunghi echilateral sînt vîrfuri ale unui triunghi de asemenea echilateral.
19. Demonstrați că într-un triunghi isoscel: 1) bisectoarele duse din vîrfurile de la bază sînt egale; 2) medianele duse din aceleași vîrfuri sînt egale.
20. Demonstrați că în triunghiurile egale ABC și $A_1B_1C_1$: 1) medianele duse din vîrfurile A și A_1 sînt egale; 2) bisectoarele duse din vîrfurile A și A_1 sînt egale.
21. Punctele A, B, C, D se află pe o dreaptă și mijlocul segmentelor AB și CD este comun. Demonstrați că dacă triunghiul ABE este isoscel cu baza AB triunghiul CDE este de asemenea isoscel cu baza CD.
22. Demonstrați egalitatea triunghiurilor după un unghi, bisectoarea triunghiului dusă din vîrful acestui unghi și o latură alăturată lui.
23. În triunghiul isoscel ABC cu baza AC este dusă mediana BM. Pe mediană este luat un punct D. Demonstrați egalitatea triunghiurilor: 1) ABD și CBD; 2) AMD și CMD.
24. Demonstrați că triunghiul ABC este isoscel dacă: 1) mediana BD este înălțime; 2) înălțimea BD este bisectoare.
25. Sînt date două triunghiuri isoscele cu baza comună. Demonstrați că medianele lor duse la bază sînt situate pe aceeași dreaptă.
26. În triunghiul isoscel ABC cu baza AC e dusă mediana BD. Aflați lungimea ei dacă perimetrul triunghiului ABC este egal cu 50 m, iar al triunghiului ABD — cu 40 m.
27. Demonstrați că bisectoarea unui triunghi isoscel dusă din vîrful opus bazei este mediană și înălțime.

* Marcăm pe teren o direcție prin jaloane.

28. Triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ au $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $\angle C=\angle C_1=90°$. Demonstraţi că $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$.
29. Demonstraţi că într-un triunghi isoscel înălţimea coborîtă pe bază este mediană şi bisectoare.
30. Triunghiurile ABC şi ABC_1 sînt isoscele cu baza comună AB. Demonstraţi egalitatea triunghiurilor ACC_1 şi BCC_1.
31. Punctele A, B, C, D aparţin unei drepte. Demonstraţi că dacă triunghiurile ABE_1 şi ABE_2 sînt egale, triunghiurile CDE_1 şi CDE_2 sînt de asemenea egale.
32. Două segmente AB şi CD se intersectează într-un punct O care este mijlocul fiecărui segment. Demonstraţi egalitatea triunghiurilor ACD şi BDC.
33. Demonstraţi egalitatea triunghiurilor după două laturi şi mediana dusă la una din ele.
34. Segmentele AB şi CD se intersectează. Demonstraţi că dacă segmentele AC, CB, BD şi AD sînt egale semidreapta AB este bisectoarea unghiului CAD, iar semidreapta CD este bisectoarea unghiului ACB.
35. Demonstraţi că în problema 34 dreptele AB şi CD sînt perpendiculare.
36. Triunghiurile ABC şi BAD sînt egale, punctele C şi D sînt situate de diferite părţi ale dreptei AB. Demonstraţi că: 1) triunghiurile CBD şi DAC sînt egale; 2) dreapta CD împarte segmentul AB în jumătate.
37. Segmentele de lungime egală AB şi CD se intersectează într-un punct O astfel, încît $AO=OD$. Demonstraţi egalitatea triunghiurilor ABC şi DCB.
38. Demonstraţi egalitatea triunghiurilor după două laturi şi o mediană care pornesc din acelaşi vîrf.
39. Demonstraţi egalitatea triunghiurilor după o latură, mediana dusă la această latură şi unghiurile pe care le formează cu ea mediana.
40. Demonstraţi egalitatea triunghiurilor după o mediană şi unghiurile, în care ea împarte unghiul triunghiului.

§ 4. SUMA UNGHIURILOR UNUI TRIUNGHI

20. CRITERIILE DE PARALELISM AL DREPTELOR

Teorema 4.1. ***Două drepte paralele cu a treia sînt paralele.***

Demonstraţie. Fie dreptele a şi b paralele cu dreapta c. Presupunem că dreptele a şi b nu sînt paralele. Atunci

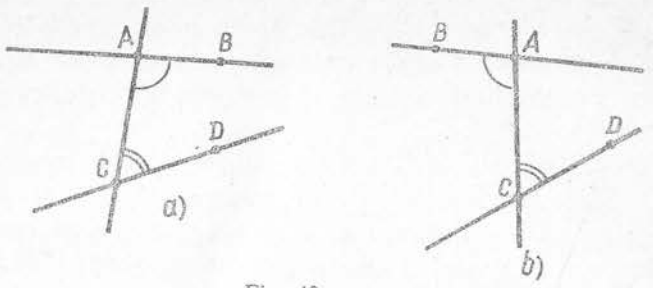


Fig. 49

ele se intersectează într-un punct oarecare C. Deci prin punctul C trec două drepte paralele cu dreapta c. Dar aceasta e imposibil, deoarece printr-un punct care nu aparţine dreptei date se poate duce cel mult o dreaptă paralelă cu cea dată. Teorema e demonstrată.

Fie AB şi CD două drepte, iar AC o a treia dreaptă care intersectează dreptele AB şi CD (fig. 49). Dreapta AC se numeşte *secantă* în raport cu dreptele AB şi CD. Unghiurile care se formează la intersecţia dreptelor AB şi CD cu secanta AC au denumiri speciale. Dacă punctele B şi D sînt situate într-un semiplan în raport cu dreapta AC unghiurile BAC şi DCA se numesc *unghiuri interne de aceeaşi parte a secantei* (fig. 49, *a*). Dacă punctele B şi D situate în semiplane diferite în raport cu dreapta AC unghiurile BAC şi DCA se numesc *alterne interne* (fig. 49, *b*).

Secanta AC formează cu dreptele AB şi CD două perechi de unghiuri interne de aceeaşi parte a secantei şi două perechi de unghiuri alterne interne. Din proprietatea unghiurilor megieşe rezultă că ***dacă unghiurile alterne interne ale unei perechi sînt egale unghiurile alterne interne ale celeilalte perechi sînt de asemenea egale, iar suma unghiurilor interne de aceeaşi parte a secantei ale fiecărei perechi este egală cu 180°.*** Reciproc, ***dacă suma unghiurilor interne de aceeaşi parte a secantei ale unei perechi este egală cu 180° suma unghiuri-***

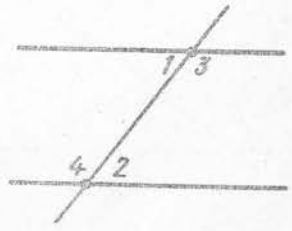


Fig. 50

lor interne de aceeași parte a secantei ale celeilalte perechi este de asemenea egală cu 180°, iar unghiurile alterne interne ale fiecărei perechi sînt egale. Să explicăm prima afirmație.

Priviți figura 50. Dacă unghiurile alterne interne *1* și *2* sînt egale unghiurile alterne interne *3* și *4* ca unghiuri megieșe cu unghiurile *1* și *2* sînt de asemenea egale. Unghiurile *1* și *4* sînt unghiuri interne de aceeași parte a secantei. Deoarece unghiul *4* completează unghiul *2* pînă la 180°, iar unghiul *2* este egal cu unghiul *1*, suma unghiurilor *1* și *4* este egală cu 180°.

Teorema 4.2. ***Dacă unghiurile alterne interne sînt egale sau suma unghiurilor interne de aceeași parte a secantei este egală cu 180° dreptele sînt paralele*** (fig. 50).

Demonstrație. Admitem că dreptele *a* și *b* formează cu secanta *AB* unghiuri alterne interne egale. Presupunem că dreptele *a* și *b* nu sînt paralele: prin urmare, ele se intersectează într-un punct oarecare *C* (fig. 51). Pe prelungirea segmentului *CB* depunem segmentul *BD* egal cu segmentul *AC*.

Triunghiurile *CAB* și *DBA* sînt egale conform criteriului întîi de egalitate a triunghiurilor. Ele au latura comună *AB*, laturile *AC* și *BD* sînt egale prin construcție, iar unghiurile *CAB* și *DBA* sînt egale ca unghiuri alterne interne. Din egalitatea triunghiurilor rezultă egalitatea unghiurilor *CBA* și *DAB*.

Suma unghiurilor megieșe *CBA* și *DBA* este egală cu 180°. Iar suma unghiurilor *DAB* și *CAB*, egale cu aceste unghiuri, adică unghiul *CAD* este mai mic decît 180°. Am ajuns la contradicție. Teorema este demonstrată.

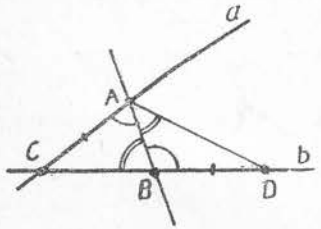


Fig. 51

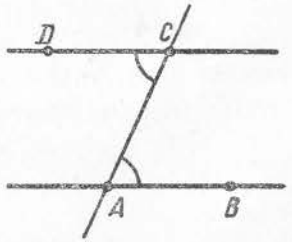


Fig. 52

Teoremele 4.1 și 4.2 exprimă *criteriile de paralelism al dreptelor.*

Problemă (3). Sînt date dreapta *AB* și punctul *C* care nu se află pe această dreaptă. Demonstrați că prin punctul *C* se poate duce o dreaptă paralelă cu dreapta *AB*.

Rezolvare. Dreapta *AC* împarte planul în două semiplane (fig. 52). Punctul *B* e situat în unul din ele. De la semidreapta *CA* în celălalt semiplan depunem unghiul *ACD* egal cu *CAB*. Atunci dreptele *AB* și *CD* vor fi paralele. Într-adevăr, unghiurile *BAC* și *DCA* sînt unghiuri alterne interne pentru dreptele *AB* și *CD* și secanta *AC*. Și deoarece ele sînt egale, dreptele *AB* și *CD* sînt paralele în conformitate cu teorema 4.2.

Comparînd afirmația problemei 3 și axiomei V (proprietății fundamentale a dreptelor paralele), ajungem la o concluzie importantă: ***printr-un punct care nu aparține dreptei date se poate duce o dreaptă paralelă cu cea dată și numai una singură.***

Teorema 4.3 (reciproca teoremei 4.2). ***Dacă două drepte paralele sînt intersectate de a treia dreaptă unghiurile alterne interne sînt egale, iar suma unghiurilor interne de aceeași parte a secantei este egală cu 180°.***

Demonstrație. Fie dreptele paralele *a* și *b* intersectate de dreapta *c*. Prin punctul *A* ducem o dreaptă a_1 astfel încît suma unghiurilor interne de aceeași parte a secantei formate de dreptele a_1 și *b* cu secanta *c* să fie egală cu 180° (fig. 53). Atunci în virtutea teoremei 4.2 dreapta a_1 este paralelă cu *b*. Însă prin punctul *A* trece numai o dreaptă paralelă cu *b*. Prin urmare, dreapta *a* coincide cu dreapta a_1. Așadar, suma unghiurilor interne de aceeași parte a se-

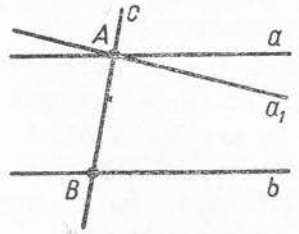


Fig. 53

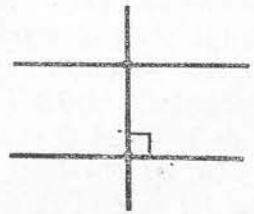


Fig. 54

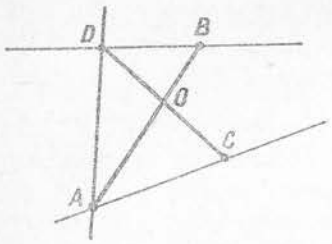


Fig. 55

cantei formate de dreptele paralele a și b cu secanta c este egală cu 180°, deci, unghiurile alterne interne sînt egale. Teorema e demonstrată în întregime.

Din teoremele 4.2 și 4.3 rezultă că ***două drepte perpendiculare pe a treia sînt paralele. Dacă o dreaptă este perpendiculară pe una din două drepte paralele ea este perpendiculară și pe cealaltă*** (fig. 54).

Problemă (5). Segmentele AB și CD se intersectează în punctul O. Demonstrați că: 1) pentru dreptele AC, BD și secanta AB unghiurile BAC și ABD sînt alterne interne; 2) pentru dreptele AC, BD și secanta AD unghiurile ABD și DAC sînt interne de aceeași parte a secantei.

Rezolvare (fig. 55). 1) Punctele C și D se află de diferite părți ale dreptei AB, deoarece segmentul CD intersectează dreapta AB (în punctul O). De aceea pentru dreptele AC, BD și secanta AB unghiurile BAC și ABD sînt alterne interne.

2) Punctele B și C se află de o parte a dreptei AD și anume, în semiplanul în care se află punctul O. De aceea pentru dreptele AC, BD și secanta AD unghiurile ADB și DAC sînt interne de aceeași parte a secantei.

21. SUMA UNGHIURILOR UNUI TRIUNGHI

Teorema 4.4. ***Suma unghiurilor unui triunghi este egală cu 180°.***

Demonstrație. Fie ABC triunghiul dat (fig. 56). Notăm mijlocul O al segmentului BC. Pe prelungirea segmentului AO depunem segmentul OD, egal cu segmentul OA. Triunghiurile BOD și COA sînt egale, deoarece unghiurile de la vîrful O sînt egale cu unghiuri opuse la vîrf, iar $OB=OC$ și $OA=OD$ prin construcție. Din egalitatea triunghiurilor rezultă că unghiul DBO este egal cu unghiul ACO.

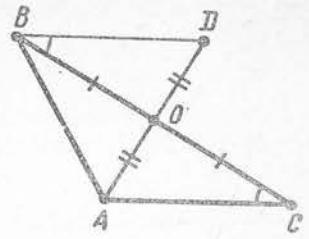


Fig. 56

De aceea suma unghiurilor triunghiului ABC de la vîrfurile B și C este egală cu unghiul ABD.

Pentru dreptele AC, BD și secanta BC unghiurile ACB și CBD sînt alterne interne. Întrucît conform celor demonstrate ele sînt egale, dreptele AC și BD sînt paralele. Deci, suma unghiurilor interne de aceeași parte a secantei CAB și ABD este egală cu 180°.

Astfel suma tuturor celor trei unghiuri ale triunghiului ABC, egală cu suma unghiurilor CAB și ABD, este egală cu 180°. Teorema e demonstrată.

Din teorema 4.4 rezultă că ***în orice triunghi cel puțin două unghiuri sînt ascuțite.***

Demonstrație. Presupunem că un triunghi are numai un unghi ascuțit sau, în genere, nu are unghiuri ascuțite. Atunci acest triunghi are două unghiuri, fiecare de cel puțin 90°. Suma acestor două unghiuri este de cel puțin 180°. Dar aceasta e imposibil, deoarece suma celor trei unghiuri este egală cu 180°.

Problemă (12). Cu ce sînt egale unghiurile unui triunghi echilateral?

Rezolvare. În triunghiul echilateral, după cum știm (problema 13 § 3), toate unghiurile sînt egale. Deoarece suma lor este egală cu 180°, fiecare unghi este egal cu 60°.

Unghi exterior al triunghiului de la vîrful dat se numește unghiul, megieș cu unghiul triunghiului de la acest vîrf (fig. 57). Pentru a nu confunda unghiul triunghiului de la vîrful dat cu unghiul exterior de la acest vîrf unghiul triunghiului se numește *unghi interior*.

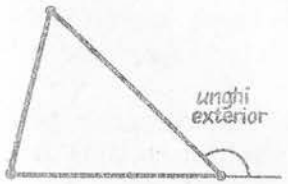


Fig. 57

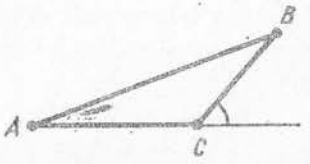


Fig. 58

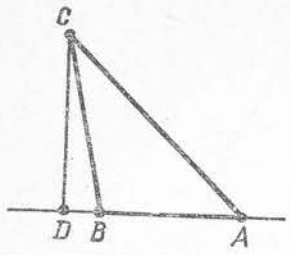


Fig. 59

Teorema 4.5. ***Unghiul exterior al triunghiului este egal cu suma celor două unghiuri interioare care nu sînt megieşe cu el.***

Demonstraţie. Fie ABC triunghiul dat (fig. 58). Conform teoremei 4.4 $\angle A+\angle B+\angle C=180°$. De aici rezultă că $\angle A+\angle B=180°-\angle C$. Partea dreaptă a acestei egalităţi este măsura în grade a unghiului exterior al triunghiului de la vîrful C. Teorema e demonstrată.

Din teorema 4.5 rezultă că ***unghiul exterior al triunghiului este mai mare decît orice unghi interior care nu e megieş cu el.***

Problemă (28). În triunghiul ABC e dusă înălţimea CD. Care din trei puncte A, B, D e situat între celelalte două dacă unghiurile A şi B ale triunghiului sînt ascuţite?

Rezolvare. Punctul B nu poate fi situat între A şi D. Dacă el ar fi situat între A şi D (fig. 59) unghiul ascuţit ABC, ca unghi exterior al triunghiului CBD, ar fi mai mare decît unghiul drept CDB. Exact la fel se demonstrează că şi punctul A nu poate fi situat între B şi D. Deci punctul D e situat între A şi B.

22. TRIUNGHIUL DREPTUNGHIC

Un triunghi care are un unghi drept se numeşte *dreptunghic*. Deoarece suma unghiurilor triunghiului este egală cu 180°, triunghiul dreptunghic are numai un unghi drept. Celelalte două unghiuri ale triunghiului dreptunghic sînt ascuţite. Unghiurile ascuţite se completează unul pe altul pînă la 90°. Latura triunghiuli dreptunghic opusă unghiului drept se numeşte *ipotenuză*, celelalte două laturi se numesc *catete* (fig. 60).

Afară de cele trei criterii de egalitate cunoscute pentru triunghiurile dreptunghice există şi alte criterii. Iată aceste criterii:

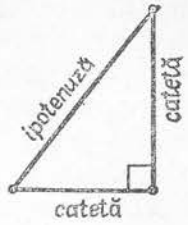


Fig. 60

1. ***Dacă ipotenuza şi un unghi ascuţit ale unui triunghi dreptunghic sînt egale respectiv cu ipotenuza şi un unghi ascuţit ale altui triunghi aceste triunghiuri sînt egale.*** (Criteriul de egalitate după ipotenuză şi un unghi ascuţit.)

2. ***Dacă o catetă şi unghiul opus ei ale unui triunghi dreptunghic sînt egale respectiv cu o catetă şi unghiul opus ei ale altui triunghi aceste triunghiuri sînt egale.*** (Criteriul de egalitate după o catetă şi unghiul opus ei.)

3. ***Dacă ipotenuza şi o catetă ale unui triunghi dreptunghic sînt egale respectiv cu ipotenuza şi o catetă ale altui triunghi aceste triunghiuri sînt egale.*** (Criteriul de egalitate după ipotenuză şi o catetă.)

Demonstraţie. Fie ABC şi $A_1B_1C_1$ triunghiuri dreptunghice cu unghiurile drepte C şi C_1 (fig. 61) pentru care este satisfăcută una din condiţiile:

1) $AB=A_1B_1$, $\angle A=\angle A_1$;
2) $BC=B_1C_1$, $\angle A=\angle A_1$;
3) $AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$.

Să demonstrăm că triunghiurile sînt egale.

Pentru demonstraţia primelor două criterii e suficient să observăm că dacă $\angle A=\angle A_1$, avem $\angle B=\angle B_1$. Iar atunci triunghiurile sînt egale în ambele cazuri conform criteriului al doilea de egalitate a triunghiurilor.

Demonstraţia criteriului de egalitate a triunghiurilor dreptunghice după ipotenuză şi o catetă a fost dată în rezolvarea problemei 28 § 3.

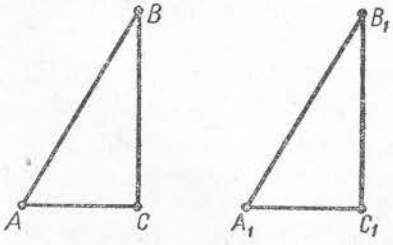


Fig. 61

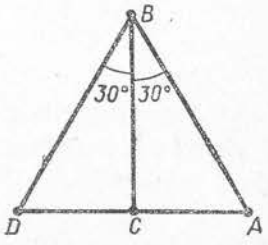


Fig. 62

Problemă (35). Demonstrați că într-un triunghi cu un unghi de 30° cateta opusă acestui unghi este egală cu o jumătate de ipotenuză.

Rezolvare. Fie ABC un triunghi dreptunghic cu unghiul drept C și unghiul ascuțit B egal cu 30° (fig. 62). Pe prelungirea laturii AC depunem un segment CD, egal cu AC. Triunghiurile ABC și BDC sînt egale conform criteriului întîi. Ele au unghiuri drepte la vîrful C, latura BC comună, iar $AC=CD$ prin construcție. Din egalitatea triunghiurilor rezultă că $\angle D=\angle A=60°$, $\angle CBD=\angle CBA=30°$, deci $\angle ABD=60°$. De aici rezultă că triunghiul ABD este echilateral. De aceea $AC=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}AB$, ceea ce trebuia demonstrat.

23. EXISTENȚA ȘI UNICITATEA PERPENDICULAREI PE O DREAPTĂ

Teorema 4.6. ***Din orice punct care nu aparține dreptei date se poate coborî o perpendiculară pe această dreaptă și numai una singură.***

Demonstrație. Fie a dreapta dată și A un punct care nu-i aparține (fig. 63). Prin punctul A ducem dreapta b paralelă cu dreapta a (problema 3 § 4). Acum prin punctul A ducem dreapta c perpendiculară pe dreapta b. Ea va fi perpendiculară pe dreapta a (teorema 4.3) și o va intersecta într-un punct oarecare (problema 45 § 1). Segmentul AB este perpendiculara coborîtă din A pe dreapta a.

Presupunem că din punctul A se pot coborî pe dreapta a două perpendiculare: AB și AC. Atunci triunghiul ABC ar avea două unghiuri drepte, ceea ce e imposibil. Teorema e demonstrată.

Lungimea perpendicularei coborîte din punctul dat pe o dreaptă se numește *distanță de la un punct la o dreaptă.*

Problemă (42). Demonstrați că distanțele de la oricare două puncte ale unei drepte la o dreaptă paralelă sînt egale.

Rezolvare. Fie a și b drepte paralele (fig. 64). Luăm pe dreapta a două puncte A și A_1 și coborîm din ele perpen-

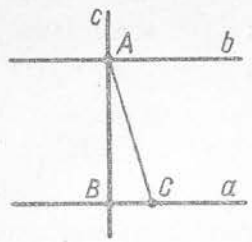


Fig. 63

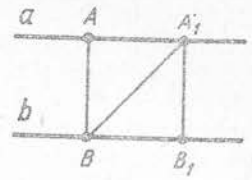


Fig. 64

dicularele AB și A_1B_1 pe dreapta b. Triunghiurile dreptunghice ABA și B_1A_1B sînt egale după ipotenuză și un unghi ascuțit. Ele au ipotenuza comună, iar unghiurile ascuțite AA_1B și B_1BA_1 egale ca unghiuri alterne interne, formate de dreptele paralele a și b și secanta BA_1. Într-adevăr, aceste unghiuri sînt sau alterne, sau interne de aceeași parte a secantei. Ele nu pot fi interne de aceeași parte a secantei, deoarece, fiind ascuțite, nu dau în sumă 180°. Din egalitatea triunghiurilor rezultă egalitatea laturilor AB și A_1B_1, adică egalitatea distanțelor de la punctele A și A_1 ale dreptei a la dreapta b.

După cum vedem, distanțele de la toate punctele unei drepte la o dreaptă paralelă sînt egale. De aceea se spune că dreptele paralele sînt echidistante. *Distanță dintre două drepte paralele* se numește distanța de la un punct oarecare al unei drepte la cealaltă dreaptă.

ÎNTREBĂRI PENTRU REPETARE

1. Demonstrați că două drepte paralele cu a treia sînt paralele.
2. Explicați care unghiuri se numesc interne de aceeași parte a secantei. Care unghiuri se numesc alterne interne?
3. Demonstrați că dacă unghiurile alterne interne ale unei perechi sînt egale unghiurile alterne interne ale altei perechi sînt de asemenea egale, iar suma unghiurilor interne de aceeași parte a secantei ale fiecărei perechi este egală cu 180°. Reciproc, dacă suma unghiurilor interne de aceeași parte a secantei a unei perechi este egală cu 180°, suma unghiurilor interne de aceeași par-

te a secantei ale altei perechi este de asemenea egală cu 180°, iar unghiurile alterne interne ale fiecărei perechi sînt egale.

4. Formulați și demonstrați criteriul de paralelism al dreptelor după unghiurile formate de aceste drepte cu o secantă.
5. Demonstrați că printr-un punct care nu aparține dreptei date se poate duce o dreaptă paralelă cu cea dată. Cîte drepte paralele cu cea dată se pot duce printr-un punct ce nu e situat pe această dreaptă?
6. Demonstrați că dacă două drepte paralele sînt intersectate de a treia dreaptă, unghiurile alterne interne sînt egale, iar suma unghiurilor interne de aceeași parte a secantei este egală cu 180°.
7. Demonstrați că două drepte perpendiculare pe a treia sînt paralele. Dacă o dreaptă este perpendiculară pe una din două drepte paralele ea este perpendiculară și pe a doua.
8. Demonstrați că suma unghiurilor unui triunghi este egală cu 180°.
9. Demonstrați că orice triunghi are cel puțin două unghiuri ascuțite.
10. Ce numim unghi exterior al triunghiului?
11. Demonstrați că un unghi exterior al triunghiului este egal cu suma a două unghiuri interioare care nu sînt megieșe cu el.
12. Demonstrați că un unghi exterior al triunghiului este mai mare decît orice unghi interior care nu este megieș cu el.
13. Ce numim triunghi dreptunghic?
14. Cu ce este egală suma unghiurilor ascuțite ale unui triunghi dreptunghic?
15. Care latură a triunghiului dreptunghic se numește ipotenuză? Care laturi se numesc catete?
16. Formulați și demonstrați criteriile de egalitate a triunghiurilor dreptunghice.
17. Demonstrați că din orice punct, care nu aparține dreptei date, se poate coborî pe această dreaptă o perpendiculară și numai una singură.
18. Ce numim distanță de la un punct la o dreaptă?
19. Explicați ce este distanța dintre două drepte paralele.

EXERCIȚII

1. Demonstrați că dacă o dreaptă oarecare intersectează una din două drepte paralele ea intersectează și cealaltă dreaptă.

2. Se dă triunghiul ABC. Pe latura AB este marcat punctul B_1, iar pe latura AC — punctul C_1. Numiți unghiurile interne de aceeași parte a secantei și unghiurile alterne interne formate de dreptele AB, AC și secanta B_1C_1.
3. Sînt date dreapta AB și punctul C care nu se află pe această dreaptă. Demonstrați că prin punctul C se poate duce o dreaptă paralelă cu dreapta AB.
4. Demonstrați că bisectoarele unghiurilor alterne interne formate de dreptele paralele și o secantă sînt paralele, adică se află pe drepte paralele.
5. Segmentele AB și CD se intersectează în punctul O. Demonstrați că: 1) pentru dreptele AC, BD și secanta AB unghiurile BAC și ABD sînt alterne interne; 2) pentru dreptele AC, BD și secanta AD unghiurile ADB, DAC sînt interne de aceeași parte a secantei.
6. Triunghiurile ABC și BAD sînt egale. Punctele C și D sînt situate de diferite părți ale dreptei AB. Demonstrați că dreptele AC și BD sînt paralele.
7. Unghiul ABC este egal cu 80°, iar unghiul BCD este egal cu 120°. Dreptele AB și CD pot fi oare paralele? Argumentați răspunsul.
8. Diferența a două unghiuri interne de aceeași parte a secantei formate de două drepte paralele și o secantă este egală cu 30°. Aflați aceste unghiuri.
9. Suma a două unghiuri alterne interne formate de două drepte paralele și o secantă este egală cu 150°. Cu ce sînt egale aceste unghiuri?
10. Unul din unghiurile care se obțin la intersecția a două drepte paralele cu o secantă este egal cu 72°. Aflați celelalte șapte unghiuri.
11. Unul din unghiurile care se obțin la intersecția a două drepte paralele cu o secantă este egal cu 30°. Poate oare unul din celelalte șapte unghiuri să fie egal cu 70°? Argumentați răspunsul.
12. Cu ce sînt egale unghiurile unui triunghi echilateral?
13. Sub ce unghi se intersectează bisectoarele a două unghiuri interne de aceeași parte a secantei formate de drepte paralele?
14. Aflați unghiul necunoscut al unui triunghi dacă el are două unghiuri egale cu: 1) 50° și 30°; 2) 40° și 75°; 3) 65° și 80°; 25° și 120°.
15. Aflați unghiurile unui triunghi dacă ele sînt proporționale cu numerele: 1) 1, 2, 3; 2) 2, 3, 4; 3) 3, 4, 5; 4) 4, 5, 6; 5) 5, 6, 7.
16. Poate oare un triunghi avea: 1) două unghiuri obtuze;

2) un unghi obtuz şi un unghi drept; 3) două unghiuri drepte?

17. Un unghi de la baza triunghiului isoscel poate oare fi obtuz?
18. Aflaţi unghiul dintre laturile laterale într-un triunghi isoscel dacă un unghi de la bază este egal cu: 1) 40°; 2) 55°; 3) 72°.
19. Aflaţi unghiul de la baza unui triunghi isoscel dacă unghiul dintre laturile laterale este egal cu: 1) 80°; 2) 120°; 3) 30°.
20. Un unghi al unui triunghi isoscel este egal cu 100°. Aflaţi celelalte unghiuri.
21. Un unghi al unui triunghi isoscel este egal cu 70°. Aflaţi celelalte unghiuri. Cîte soluţii are problema?
22. În triunghiul isoscel ABC cu baza AC e dusă bisectoarea CD. Aflaţi unghiurile triunghiului ABC dacă unghiul ADC este egal cu: 1) 60°; 2) 75°; 3) α.
23. În triunghiul isoscel ABC cu baza AC şi unghiul de la vîrful B de 36° este dusă bisectoarea AD. Demonstraţi că triunghiurile CDA şi ADB sînt isoscele.
24. În triunghiul ABC sînt duse bisectoarele din vîrfurile A şi B. Punctul lor de intersecţie este D. Aflaţi unghiul ADB dacă:
1) $\angle A=50°$, $\angle B=100°$; 2) $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$; 3) $\angle C=130°$; 4) $\angle C=\gamma$.
25. Un unghi exterior al unui triunghi isoscel este egal cu 70°. Aflaţi unghiurile triunghiului.
26. Aflaţi unghiurile unui triunghi, ştiind că unghiurile exterioare de la două vîrfuri ale lui sînt egale cu 120° şi 150°.
27. Două unghiuri exterioare ale unui triunghi sînt egale cu 100° şi 150°. Aflaţi al treilea unghi exterior.
28. În triunghiul ABC e dusă înălţimea CD. Care din cele trei puncte A, B, D e situat între celelalte două, dacă unghiurile A şi B ale triunghiului sînt ascuţite?
29. Din vîrful unghiului drept al triunghiului ABC e dusă înălţimea BD. Aflaţi unghiul CBD dacă: 1) $\angle A=20°$; 2) $\angle A=65°$; 3) $\angle A=\alpha$.
30. Din vîrful unghiului obtuz B al triunghiului ABC e dusă înălţimea BD. Aflaţi unghiurile triunghiurilor ABD şi CBD dacă $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$.
31. Demonstraţi că bisectoarea unghiului exterior de la vîrful unui triunghi isoscel este paralelă cu baza.
32. Suma unghiurilor exterioare ale triunghiului ABC de la vîrfurile A şi B luate cîte unul la fiecare vîrf este egală cu 240°. Cu ce este egal unghiul C al triunghiului?

33. Este dat triunghiul ABC. Pe prelungirea laturii AC sînt depuse segmentele $AD=AB$ şi $CE=CB$. Cum se pot afla unghiurile triunghiului DBE, cunoscînd unghiurile triunghiului ABC?
34. Un unghi interior al triunghiului este egal cu 30°, iar un unghi exterior — cu 40°. Aflaţi celelalte unghiuri interioare ale triunghiului.
35. Demonstraţi că într-un triunghi dreptunghic cu un unghi de 30° cateta opusă acestui unghi este egală cu o jumătate de ipotenuză.
36. Aflaţi unghiurile unui triunghi dreptunghic isoscel.
37. În triunghiul echilateral ABC e dusă mediana AD. Aflaţi ungiurile triunghiului ABD.
38. Înălţimile triunghiului ABC duse din vîrfurile A şi C se intersectează în punctul M. Aflaţi $\angle AMC$ dacă $\angle A=70°$, $\angle C=80°$.
39. În triunghiul ABC mediana BD este egală cu jumătatea laturii AC. Aflaţi unghiul B al triunghiului.
40. Dreapta a intersectează segmentul BC în mijlocul lui. Demonstraţi că punctele B şi C se află la aceeaşi distanţă de la dreapta a.
41. Segmentul BC intersectează dreapta a în punctul O. Distanţele de la punctele B şi C la dreapta a sînt egale. Demonstraţi că punctul O este mijlocul segmentului BC.
42. Demonstraţi că distanţele de la oricare două puncte ale unei drepte la o dreaptă paralelă sînt egale.

§ 5. CONSTRUCŢII GEOMETRICE

24. CIRCUMFERINŢA

Definiţie. Se numeşte *circumferinţă* figura care constă din toate punctele planului, egal depărtate de punctul dat. Acest punct se numeşte *centrul circumferinţei*.

Distanţa de la punctele circumferinţei la centrul ei se numeşte *raza circumferinţei*. Orice segment care uneşte un punct al circumferinţei cu centrul se numeşte de asemenea rază (fig. 65).

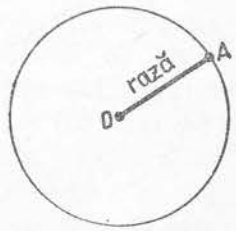


Fig. 65

Segmentul care uneşte două puncte ale circumferinţei se numeşte *coardă*.

Coarda care trece prin centru se numeşte *diametru.* În figura 66 *BC* este coardă, *AD* — diametru.

O circumferinţă se numeşte *circumscrisă* unui triunghi dacă ea trece prin toate vîrfurile lui.

Centrul circumferinţei circumscrise unui triunghi este punctul de intersecţie a perpendicularelor duse pe laturile triunghiului prin mijlocurile lor.

Demonstraţie. Fie *ABC* triunghiul dat şi *O* centrul circumferinţei circumscrise lui (fig. 67). Triunghiul *AOC* este isoscel; laturile lui *OA* şi *OC* sînt egale ca raze. Mediana *OD* a acestui triunghi este şi înălţimea lui. De aceea centrul circumferinţei e situat pe o dreaptă care este perpendiculară pe latura *AC* şi trece prin mijlocul ei. Exact la fel se demonstrează că centrul circumferinţei e situat pe perpendicularele duse pe celelalte două laturi prin mijlocurile lor.

Notă. Dreapta care trece prin mijlocul segmentului perpendiculară pe el deseori este numită *mediatoare.* În legătura cu aceasta uneori se spune că centrul circumferinţei triunghiului e situat la intersecţia mediatoarelor laturilor triunghiului.

Dreapta care trece printr-un punct al circumferinţei perpendiculară pe raza dusă în acest punct se numeşte *tangentă.* Acest punct al circumferinţei se numeşte *punct de tangenţă.* În figura 68 dreapta este dusă prin punctul *A* al circumferinţei perpendiculară pe raza *OA*. Dreapta *a* este tangentă la circumferinţă. Punctul *A* este punct de tangenţă. Putem spune de asemenea că circumferinţa e tangentă la dreapta *a* în punctul *A*.

O circumferinţă se numeşte *înscrisă* într-un triunghi

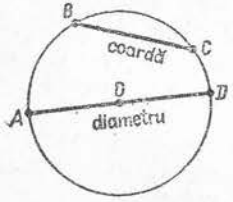


Fig. 66

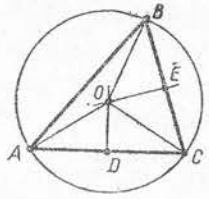


Fig. 67

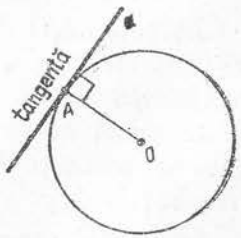


Fig. 68

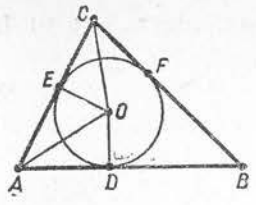


Fig. 69

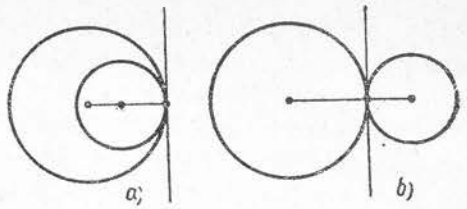


Fig. 70

dacă ea este tangentă la toate laturile lui.

Centrul circumferinţei înscrise într-un triunghi este punctul de intersecţie a bisectoarelor lui.

Demonstraţie. Fie *ABC* triunghiul dat, *O* centrul circumferinţei înscrise în triunghi, *D, E* şi *F* punctele de tangenţă ale circumferinţei cu laturile lui (fig. 69). Triunghiurile dreptunghice *AOD* şi *AOE* sînt egale după ipotenuză şi o catetă. Ele au ipotenuza *AO* comună, iar catetele *OD* şi *OE* egale ca raze. Din egalitatea triunghiurilor rezultă egalitatea unghiurilor *OAD* şi *OAE*. Dar aceasta înseamnă că punctul *O* e situat pe bisectoarea triunghiului, dusă din vîrful *A*. Exact la fel se demonstrează că punctul *O* e situat pe celelalte două bisectoare ale triunghiului.

Vom spune că două circumferinţe care au un punct comun *sînt tangente* în acest punct dacă ele au în acest punct o tangentă comună (fig. 70). Circumferinţele se numesc *tangente interior* dacă centrele lor sînt situate de aceeaşi parte a tangentei lor comune (fig. 70, *a*). Circumferinţele se numesc *tangente exterior* dacă centrele lor sînt situate de diferite părţi ale tangentei lor comune (fig. 70, *b*).

25. CE ÎNSEAMNĂ PROBLEMA DE CONSRTUCŢIE

În problemele de construcţie e vorba despre construcţia unei figuri geometrice cu ajutorul instrumentelor de desen date. De cele mai dese ori aceste instrumente sînt rigla şi compasul. Rezolvarea problemei constă nu atît în construirea figurii, cît în răspunsul la întrebarea, cum să executăm această construcţie şi în demonstraţia respectivă.

Problema se consideră rezolvată dacă este indicat pro-

cedeul de construcţie a figurii şi este demonstrat că în urma executării construcţiilor indicate se obţine, într-adevăr, figura cu proprietăţile cerute.

Cu ajutorul riglei ca instrument de construcţii geometrice se poate duce o dreaptă arbitrară; o dreaptă arbitrară ce trece printr-un punct dat; o dreaptă care trece prin două puncte date. Alte operaţii nu pot fi executate cu ajutorul riglei. De exemplu, cu rigla nu se pot depune segmente chiar dacă ea are diviziuni.

Compasul ca instrument care se foloseşte la executarea construcţiilor geometrice ne permite să descriem din centrul dat o circumferinţă de rază dată. În particular, cu compasul putem depune un segment dat pe dreapta dată de la un punct dat.

Vom considera cele mai simple probleme de construcţie.

26. CONSTRUCŢIA UNUI TRIUNGHI CU LATURILE DATE

Problema 5.1. ***Să se construiască un triunghi cu laturile date a, b, c (fig. 71, a).***

Rezolvare. Cu ajutorul riglei ducem o dreaptă arbitrară şi notăm pe ea un punct arbitrar B (fig. 71, b). Cu o deschizătură de compas egală cu a descriem o circumferinţă cu centrul B şi raza a. Fie C punctul ei de intersecţie cu dreapta. Acum cu o deschizătură de compas egală cu c descriem o circumferinţă din centrul B, iar cu o deschizătură de compas egală cu b descriem o circumferinţă din centrul C. Fie A punctul de intersecţie a acestor circumferinţe. Ducem segmentele AB şi AC. Triunghiul ABC are laturile egale cu a, b, c.

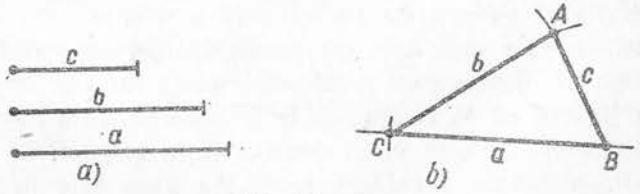


Fig. 71

27. CONSTRUCŢIA UNUI UNGHI EGAL CU UNGHIUL DAT

Problema 5.2. ***De la semidreapta dată în semiplanul dat să se depună un unghi egal cu unghiul dat.***

Rezolvare. Ducem o circumferinţă arbitrară cu centrul în vîrful A al unghiului dat (fig. 72, a). Fie B şi C punctele de intersecţie a circumferinţei cu laturile unghiului. Ducem o circumferinţă cu raza AB şi centrul în punctul O — originea semidreptei date (fig. 72, b). Notăm prin B_1 punctul de intersecţie a acestei circumferinţe cu semidreapta dată. Descriem o circumferinţă cu centrul B_1 şi raza BC. Punctul C_1 de intersecţie a circumferinţelor construite în semiplanul indicat se află pe latura unghiului căutat. Pentru demonstraţie e suficient să observăm că triunghiurile ABC şi OB_1C_1 sînt egale ca triunghiuri cu laturi respectiv egale. Unghiurile A şi O sînt unghiuri corespunzătoare ale acestor triunghiuri.

Fig. 72

28. CONSTRUCŢIA BISECTOAREI UNUI UNGHI

Problema 5.3. ***Să se construiască bisectoarea unui unghi dat.***

Rezolvare. Desciem o circumferinţă de rază arbitrară cu centrul în vîrful A al unghiului dat (fig. 73). Fie B şi C punctele ei de intersecţie cu laturile unghiului. Din punctele B şi C descriem circumferinţe de aceeaşi rază. Fie D punctul lor de intersecţie diferit de A. Ducem semi-

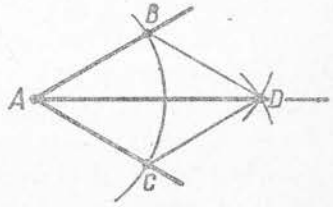


Fig. 73

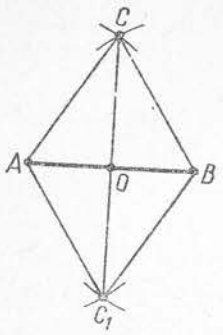


Fig. 74

dreapta *AD*. Ea împarte unghiul *BAC* în jumătate. Aceasta rezultă din egalitatea triunghiurilor *ABD* și *ACD* în care *DAB* și *DAC* sînt unghiuri corespunzătoare.

29. ÎMPĂRȚIREA UNUI SEGMENT ÎN JUMĂTATE

Problema 5.4. ***Să se împartă un segment în jumătate.***

Rezolvare. Fie *AB* segmentul dat (fig. 74). Din punctele *A* și *B* descriem circumferințele de rază *AB*. Fie *C* și C_1 punctele de intersecție ale acestor circumferințe. Ele sînt situate în semiplane diferite în raport cu dreapta *AB*. Segmentul CC_1 intersectează dreapta *AB* într-un punct oarecare *O*. Acest punct este mijlocul segmentului *AB*.

Într-adevăr, triunghiurile CAC_1 și CBC_1 sînt egale conform criteriului al treilea de egalitate a triunghiurilor. De aici rezultă egalitatea unghiurilor *ACO* și *BCO*. Triunghiurile *ACO* și *BCO* sînt egale în conformitate cu criteriul întîi de egalitate a triunghiurilor. Laturile *AO* și *BO* ale acestor triunghiuri sînt corespunzătoare și de aceea ele sînt egale. Așadar, *O* este mijlocul segmentului *AB*.

30. CONSTRUCȚIA UNEI DREPTE PERPENDICULARE

Problema 5.5. ***Printr-un punct dat O să se ducă o dreaptă, perpendiculară pe dreapta dată a.***

Rezolvare. Sînt posibile două cazuri:

1) punctul *O* aparține dreptei *a*;

2) punctul *O* nu aparține dreptei *a*.

Considerăm primul caz (fig. 75).

Din punctul *O* ducem o circumferință de rază arbitrară. Ea intersectează dreapta *a* în două puncte: *A* și *B*. Din punctele *A* și *B* ducem circumferințe de rază *AB*. Fie *C* punctul lor de intersecție. Dreapta căutată trece prin punctele *O* și *C*. Perpendicularitatea dreptelor *OC* și *AB* rezultă

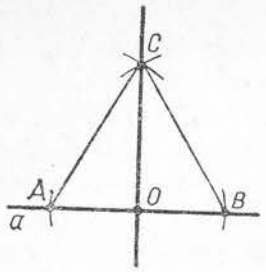


Fig. 75

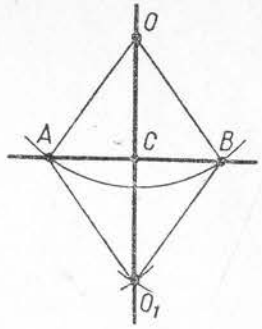


Fig. 76

din egalitatea unghiurilor de la vîrful *O* al triunghiurilor *ACO* și *BCO*. Aceste triunghiuri sînt egale conform criteriului al treilea de egalitate a triunghiurilor.

Consedirăm cazul al doilea (fig. 76).

Din punctul *O* ducem o circumferință care intersectează dreapta *a*. Fie *A* și *B* punctele ei de intersecție cu dreapta *a*. Din punctele *A* și *B* ducem circumferințe de aceeași rază. Fie O_1 punctul lor de intersecție situat în semiplanul diferit de semiplanul în care se află punctul *O*. Dreapta căutată trece prin punctele *O* și O_1. Să demonstrăm aceasta. Notăm prin *C* punctul de intersecție a dreptelor *AB* și OO_1. Triunghiurile *AOB* și AO_1B sînt egale conform criteriului al treilea. De aceea unghiul *OAC* este egal cu unghiul O_1AC. Însă atunci triunghiurile *OAC* și O_1AC sînt egale conform criteriului întîi. Deci, unghiurile lor *ACO* și ACO_1 sînt egale. Și deoarece ele sînt megieșe, ele sînt drepte. Așadar, *OC* este perpendiculara coborîtă din punctul *O* pe dreapta *a*.

31. LOCUL GEOMETRIC AL PUNCTELOR

Una din metodele de rezolvare a problemelor de construcție este metoda locurilor geometrice. Se numește *loc geometric al punctelor* figura care constă din toate punctele planului ce posedă o anumită proprietate. De exemplu, circumferința poate fi definită ca locul geometric al punctelor egal depărtate de la un punct dat.

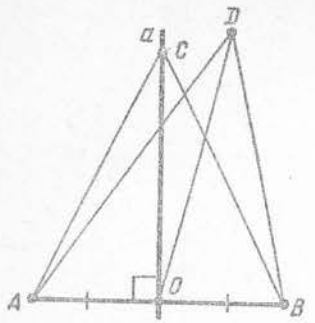


Fig. 77

Un important loc geometric al punctelor ne dă următoarea teoremă:

Teorema 5.6. ***Locul geometric al punctelor egal depărtate de la două puncte date este o dreaptă care trece prin mijlocul segmentului ce unește aceste puncte și e perpendiculară pe el.***

Demonstrație. Fie A și B punctele date, a dreapta care trece prin mijlocul O al segmentului AB perpendicular pe el (fig. 77). Trebuie să demonstrăm că: 1) fiecare punct al dreptei a este egal depărtat de punctele A și B; 2) fiecare punct D al planului egal depărtat de punctele A și B e situat pe dreapta a. Faptul că orice punct C al dreptei a se află la distanțe egale de la punctele A și B rezultă din egalitatea triunghiurilor AOC și BOC. Aceste triunghiuri au unghiuri drepte la vîrful O, latura comună OC și $AO=OB$, fiindcă O este mijlocul segmentului AB. Să arătăm acum că fiecare punct D al planului egal depărtat de la punctele A și B e situat pe dreapta a.

Să considerăm triunghiul ADB. El este isoscel, deoarece $AD=BD$. DO este mediana lui. În virtutea proprietății triunghiului isoscel mediana dusă la bază este înălțime. Conform teoremei 2.3 dreapta OD coincide cu a și, deci, punctul D se află pe dreapta a. Teorema e demonstrată.

32. METODA LOCURILOR GEOMETRICE

Esența metodei locurilor geometrice folosită la rezolvarea problemelor de construcție este următoarea. Admitem că rezolvînd o problemă de construcție trebuie să găsim un punct X care satisface două condiții. Locul geometric al punctelor care satisfac prima condiție este o figură oarecare F_1, iar locul geometric al punctelor care satisfac a doua condiție este o figură oarecare F_2. Punctul căutat X aparține figurilor F_1 și F_2, adică este un punct de intersecție

a acestor figuri. Dacă aceste locuri geometrice sînt simple (să zicem, constau din drepte și circumferințe) noi le putem construi și găsi punctul X, care ne interesează. Dăm un exemplu.

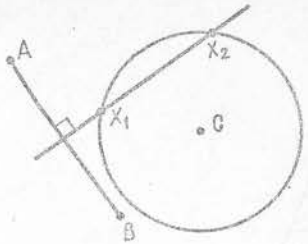


Fig. 78

Problemă (38). Sînt date trei puncte: A, B, C. Construiți punctul X egal depărtat de punctele A și B și situat la distanța dată de la punctul C.

Rezolvare. Punctul căutat X satisface două condiții: 1) el este egal depărtat de la punctele A și B; 2) el este situat la distanța dată de la punctul C. Locul geometric al punctelor care satisfac prima condiție este o dreaptă care trece prin mijlocul segmentului AB și este perpendiculară pe el (fig. 78). Locul geometric al punctelor care satisfac a doua condiție este o circumferință de rază dată cu centrul în punctul C. Punctul căutat X este situat la intersecția acestor locuri geometrice.

33. UNGHIURI INSCRISE IN CIRCUMFERINȚA

Unghiul vîrful căruia se află pe o circumefrință, iar laturile intersectează această circumferință se numește *înscris* în circumferință. Unghiul ABC din figura 79 este înscris în circumferință, deoarece vîrful B e situat pe circumferință, iar laturile trec prin punctele ei A și C.

Teorema 5.7. ***Unghiul înscris într-o circumferință la-***

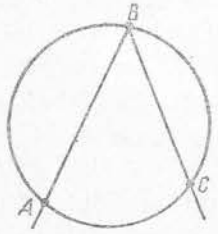


Fig. 79

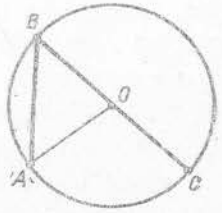


Fig. 80

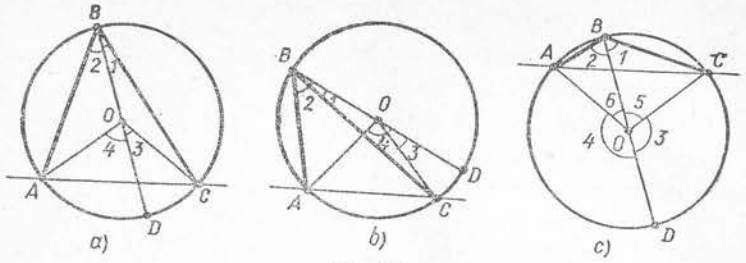


Fig. 81

turile căruia trec prin două puncte date ale circumefrinței este egal cu jumătatea unghiului dintre razele duse în aceste puncte sau o completează pînă la 180°.

Demonstrație. Să considerăm un caz particular cînd una din laturile unghiului înscris trece prin centrul circumferinței (fig. 80). Triunghiul *AOB* este isoscel, deoarece laturile lui *OA* și *OB* sînt egale ca raze. De aceea unghiurile *A* și *B* ale triunghiului dat sînt egale, dar deoarece suma lor este egală cu unghiul exterior al triunghiului de la vîrful *O*, unghiul *B* este egal cu jumătatea unghiului *AOC*. Ceea ce trebuia demonstrat.

Cazul general se reduce la cazul particular cercetat dacă ducem diametrul auxiliar *BD* (fig. 81).

Să examinăm cazul, reprezentat în figura 81, *a*. Unghiul înscris *ABC* este egal cu suma unghiurilor *1* și *2*, iar unghiul dintre razele *OA* și *OC* este egal cu suma unghiurilor *3* și *5*. Conform celor demonstrate unghiul *1* este egal cu jumătatea unghiului *3*, iar unghiul *2* este egal cu jumătatea unghiului *4*. De aceea unghiul înscris *ABC* este egal cu jumătatea unghiului dintre razele *OA* și *OC*.

Cazul reprezentat în figura 81, *b* se analizează în același mod. Deosebirea constă doar în faptul că unghiul *ABC* este egal cu diferența unghiurilor *2* și *1*, iar unghiul *AOC* este egal cu diferența unghiurilor *4* și *3*. În ambele cazuri unghiul *ABC* este egal cu jumătatea unghiului *AOC*.

În cazul reprezentat în figura 81, *a* unghiul *ABC* este egal cu suma unghiurilor *1* și *2*, însă unghiul *AOC* este egal cu suma unghiurilor *5* și *6* și nu a unghiurilor *3* și *4*.

De aceea unghiul *ABC* egal cu semisuma unghiurilor *3* și *4* este egal cu

$$\frac{(180^\circ-\angle 5)+(180^\circ-\angle 6)}{2}=180^\circ-\frac{\angle 5+\angle 6}{2}=180^\circ-\frac{1}{2}\angle AOC.$$

Teorema e demonstrată.

Notă. Primul și al doilea caz în demonstrația teoremei 5.7 diferă de cel de-al treilea prin faptul că în primele două cazuri vîrful unghiului înscris *(B)* și centrul circumferinței *(O)* sînt situate de aceeași parte a dreptei *AC*, iar în al treilea caz — de diferite părți. Conform acestui criteriu se poate afla cînd unghiul înscris este egal cu jumătatea unghiului dintre raze și cînd o completează pînă la 180°.

Menționăm de asemenea că jumătatea unghiului dintre raze nu e mai mare decît 90°, deci, completarea lui pînă la 180° nu e mai mică decît 90°. De aici rezultă că *dacă unghiul înscris este ascuțit el este egal cu jumătatea unghiului dintre raze, dar dacă este obtuz el o completează pînă la 180°.*

Consecință. *Toate unghiurile înscrise în circumferință laturile cărora trec prin două puncte date ale circumferinței, iar vîrfurile sînt situate de aceeași parte a dreptei care unește aceste puncte, sînt egale.* În particular, *unghiurile, laturile cărora trec prin extremitățile diametrului circumferinței, sînt drepte* (fig. 82).

Problemă (48). Punctele *A*, *B*, *C* sînt situate pe o circumferință. Cu ce este egal unghiul *ABC* dacă coarda *AC* este egală cu raza circumferinței? (Două cazuri).

Rezolvare. Dacă punctul *B* și centrul *O* sînt situate

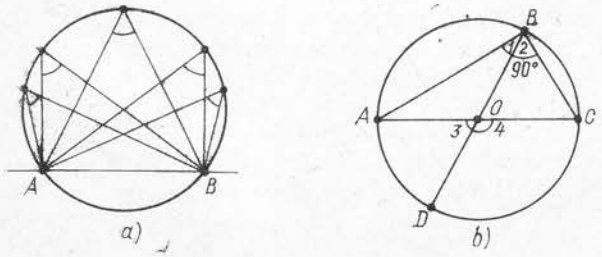


Fig. 82

de aceeași parte a dreptei AC (fig. 83, *a*) conform proprietății unghiului înscris $\angle ABC=\frac{1}{2}\angle AOC$. Deoarece, conform condiției, coarda AC este egală cu raza, triunghiul AOC este echilateral și, deci, unghiul AOC este egal cu 60°. De aceea $\angle ABC=30°$. Dacă punctele B și O sînt situate pe diferite părți ale dreptei AC (fig. 83, *b*) conform proprietății unghiului înscris

$$\angle ABC=180°-\frac{1}{2}\angle AOC=150°.$$

ÎNTREBĂRI PENTRU REPETARE

1. Ce numim circumferință, centru al circumferinței, rază?
2. Ce numim coardă a circumferinței? Care coardă se numește diametru?
3. Care circumferință se numește circumscrisă unui triunghi?
4. Demonstrați că centrul circumferinței circumscrise unui triunghi este situat la intersecția mediatoarelor laturilor triunghiului.
5. Care dreaptă se numește tangentă la o circumferință?
6. Care circumferință se numește înscrisă într-un triunghi?
7. Demonstrați că centrul circumferinței, înscrise într-un triunghi, este situat la intersecția bisectoarelor lui.
8. Ce înseamnă: circumferințele sînt tangente într-un punct dat?
9. Care circumefrințe se numesc tangente exterior și care interior?
10. Explicați cum se construiește un triunghi după trei laturi.
11. Explicați cum se depune un unghi egal cu cel dat de la semidreapta dată în semiplanul dat.

Fig. 83

12. Explicați cum se împarte un unghi dat în jumătate.
13. Explicați cum se împarte un segment în jumătate.
14. Explicați cum se duce printr-un punct dat o dreaptă perpendiculară pe dreapta dată.
15. Ce numim loc geometric al punctelor?
16. Ce reprezintă locul geometric al punctelor egal depărtate de la două puncte date?
17. În ce constă metoda locurilor geometrice folosită la rezolvarea problemelor de construcție? Dați un exemplu.
18. Care unghi se numește înscris într-o circumferință?
19. Formulați și demonstrați teorema despre unghiurile înscrise într-o circumferință.
20. Cu ce este egal unghiul ABC înscris într-o circumferință dacă: a) vîrful unghiului B și centrul circumferinței O sînt situate în același semiplan în raport cu dreapta AC; b) vîrful unghiului B și centrul O sînt situate în semiplane diferite în raport cu dreapta AC; c) coarda AC este diametru al circumferinței?
21. Cu ce este egal unghiul înscris într-o circumferință dacă el este ascuțit (obtuz)?
22. Demonstrați că toate unghiurile înscrise într-o circumferință, laturile cărora trec prin două puncte date ale circumferinței, iar vîrfurile sînt situate de aceeași parte a dreptei ce unește aceste puncte sînt egale.

EXERCIȚII

1. Demonstrați că orice semidreaptă care pornește din centrul unei circumferințe intersectează circumferința într-un singur punct.
2. Demonstrați că dreapta care trece prin centrul unei circumferințe intersectează circumferința în două puncte.
3. Demonstrați că diametrul circumferinței care trece prin mijlocul coardei e perpendicular pe această coardă.
4. Formulați și demonstrați teorema reciprocă afirmației din problema 3.
5. Dintr-un punct al circumferinței date e dus un diametru și o coardă egală cu raza. Aflați unghiul dintre ele.
6. Dintr-un punct al circumferinței date sînt duse două coarde egale cu raza. Aflați unghiul dintre ele.
7. O circumferință poate oare fi tangentă la o dreaptă în două puncte? Argumentați răspunsul.
8. Demonstrați că tangenta la o circumferință nu are alte puncte comune cu circumferința, în afară de tangență.
9. Ce unghiuri formează coarda AB, egală cu raza circumferinței, și tangenta dusă în punctul A?

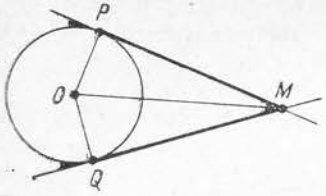


Fig. 84

10. Prin extremitățile unei coarde egale cu raza sînt duse drepte tangente la circumferință. Aflați unghiurile sub care se intersectează aceste drepte.
11. Două circumferințe cu razele de 30 cm și 40 cm sînt tangente. Aflați distanța dintre centrele lor în cazurile cînd circumferințele sînt tangente exterior și interior.
12. Sînt oare tangente două circumferințe dacă razele lor sînt egale cu 25 cm și 50 cm, iar distanța dintre centre este de 60 cm?
13. 1) Punctele A, B, C aparțin unei drepte, iar punctul O se află în exteriorul dreptei. Triunghiurile AOB și BOC pot fi oare isoscele, avînd bazele AB și BC? Argumentați răspunsul. 2) O circumferință și o dreaptă pot oare să se intersecteze mai mult decît în două puncte?
14. 1) Două circumferințe cu centrele O și O_1 se intersectează în punctele A și B. Demonstrați că dreapta AB este perpendiculară pe dreapta OO_1. 2) Demonstrați că două circumferințe nu se pot intersecta mai mult decît în două puncte.
15. 1) Prin punctul A al unei circumferințe cu centrul O este dusă o dreaptă care nu e tangentă la circumferință. OB este perpendiculara coborîtă pe această dreaptă. Pe prelungirea segmentului AB e depus segmentul $BC=AB$. Demonstrați că punctul C se află pe circumferință. 2) Demonstrați că dacă o dreaptă și o circumferință au un singur punct comun această dreaptă e tangentă la circumferință în acest punct. 3) Demonstrați că dacă două circumefrințe au un singur punct comun ele sînt tangente în acest punct.
16. 1) Dintr-un punct sînt duse două tangente la o circumferință (fig. 84). Demonstrați că segmentele MP și MQ ale tangentelor date sînt egale. 2) Demonstrați că printr-un punct nu pot trece mai mult decît două tangente la o circumferință.
17. Construiți un triunghi cu laturile a, b, c date dacă: 1) $a=2$ cm, $b=3$ cm; $c=4$ cm; 2) $a=3$ cm, $b=4$ cm; $c=5$ cm; 3) $a=4$ cm, $b=5$ cm, $c=6$ cm.
18. Este dat triunghiul ABC. Construiți un triunghi ABD egal cu cel dat.

19. Construiți un triunghi, fiind date două laturi și raza circumferinței circumscrise.
20. Construiți o circumferință de rază dată care trece prin două puncte date.
21. Construiti triunghiul ABC dacă sînt date:
    1) două laturi și unghiul dintre ele:
    a) $AB=5$ cm, $AC=6$ cm, $\angle A=40°$;
    b) $AB=3$ cm, $BC=5$ cm, $\angle B=70°$.
    2) o latură și unghiurile alăturate ei:
    a) $AB=6$ cm, $\angle A=30°$, $\angle B=50°$;
    b) $AB=4$ cm, $\angle A=45°$, $\angle B=60°$.
22. Construiți un triunghi, fiind date două laturi și unghiul opus celei mai mari dintre ele:
    1) $a=6$ cm, $b=4$ cm, $\alpha=70°$;
    2) $a=4$ cm, $b=6$ cm, $\beta=100°$.
23. Construiți un triunghi isoscel, fiind date latura laterală și un unghi de la bază.
24. Împărțiți un unghi în patru părți egale.
25. Construiți unghiuri de 60° și 30°.
26. Construiți un triunghi, fiind date două laturi și o mediană dusă la una din ele.
27. Construiți un triunghi, fiind date două laturi și o mediană dusă la cea de-a treia latură.
28. Este dat un triunghi. Construiți medianele și înălțimile lui.
29. Construiți un triunghi, fiind date o latură, mediana dusă la această latură și raza circumferinței circusmscrise.
30. Construiți un triunghi dreptunghic, fiind date ipotenuza și o catetă.
31. Construiți un triunghi, fiind date două laturi și înălțimea coborîtă pe latura a treia.
32. Construiți un triunghi, fiind date o latură, mediana și înălțimea dusă la această latură.
33. Construiți un triunghi, fiind date două laturi și înălțimea coborîtă pe una din ele.
34. Construiți un triunghi isoscel, fiind date latura laterală și înălțimea coborîtă pe bază.
35. Construiți un triunghi isoscel, fiind date baza și raza circumferinței circumscrise.
36. Demonstrați că locul geometric al punctelor situate la distanța h de la dreapta dată constă din două drepte paralele cu cea dată la distanța h de la ea.
37. Pe dreapta dată găsiți un punct situat la distanța dată de la altă dreaptă dată.
38. Sînt date trei puncte: A, B, C. Construiți un punct X

egal depărtat de punctele A și B și situat la distanța dată de la punctul C.

39. Pe o dreaptă dată găsiți un punct egal depărtat de două puncte date.

40. Sînt date patru puncte: A, B, C, D. Găsiți un punct X egal depărtat de punctele A și B și egal depărtat de punctele C și D.

41. Construiți un triunghi, fiind date o latură, un unghi alăturat ei și suma celorlalte două laturi.

42. Construiți un triunghi, fiind date a latură, un unghi alăturat ei și diferența celorlalte două laturi.

43. Construiți un triunghi dreptunghic, fiind date o catetă și suma dintre ipotenuză și cealaltă catetă.

44. Construiți un triunghi, fiind date o latură, unghiul opus ei și înălțimea dusă din vîrful acestui unghi.

45. Construiți o circumferință tangentă la laturile unui unghi și la una din laturi — în punctul dat.

46. Latura unui triunghi este egală cu 10 cm, iar unghiul opus ei — cu 150°. Aflați raza circumferinței circumscrise.

47. Punctele A, B, C sînt situate pe o circumferință. Cu ce este egală coarda AC dacă unghiul ABC este egal cu 30°, iar diametrul circumferinței este egal cu 10 cm?

48. Punctele A, B, C sînt situate pe o circumferință. Cu ce este egal unghiul ABC dacă coarda AC este egală cu raza circumferinței? (Două cazuri.)

49. Demonstrați că centrul circumferinței circumscrise unui triunghi dreptunghic este mijlocul ipotenuzei.

50. Demonstrați că mediana unui triunghi dreptunghic dusă la ipotenuză, îl împarte în două triunghiuri isoscele.

51. Construiți un triunghi dreptunghic, fiind date ipotenuza și înălțimea coborîtă din vîrful unghiului drept pe ipotenuză.

52. Pe o circumferință sînt date patru puncte: A, B, C, D. Cu ce este egal unghiul ADC dacă unghiul ABC este egal cu α? (Două cazuri.)

53. Coardele AD și BC ale unei circumferințe se intersectează. Unghiul ABC este egal cu 50°, iar unghiul ACD cu 80°. Aflați unghiul CAD.

54. 1) Printr-un punct dat duceți o dreaptă tangentă la circumferința dată.

2) Cum se construiește o tangentă la două circumferințe?

55. 1) Prin punctul S sînt duse tangentele SA și SB la o circumferință (fig. 85). Tangenta t intersectează segmentele SA și SB în punctele A_1 și B_1. Demonstrați că

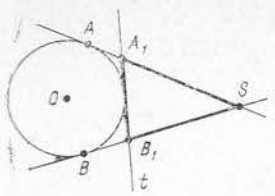


Fig. 85

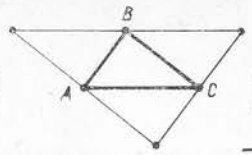


Fig. 86

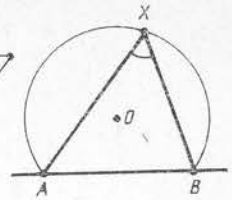


Fig. 87

perimetrul triunghiului SA_1B_1 nu depinde de tangenta t și este egal cu $SA+SB$.

2) Sînt date un unghi și un punct. Cum trebuie dusă o dreaptă prin acest punct pentru ca ea să taie de la unghiul dat un triunghi cu perimetrul dat?

56. 1) Demonstrați că mediatoarele a două laturi ale triunghiului se intersectează (nu sînt paralele).

2) Demonstrați că mediatoarele celor trei laturi ale unui triunghi se intersectează într-un punct.

3) Demonstrați că oricărui triunghi i se poate circumscrie o circumferință și numai una singură.

57. 1) Prin vîrfurile triunghiului ABC sînt duse drepte paralele cu laturile opuse (fig. 86). Punctele lor de intersecție sînt vîrfuri ale unui triunghi nou. Demonstrați că vîrfurile triunghiului dat sînt mijlocuri ale laturilor triunghiului nou.

2) Demonstrați că dreptele care conțin înălțimile unui triunghi se intersectează într-un punct.

58. 1) Demonstrați că două bisectoare ale unui triunghi se intersectează.

2) Demonstrați că cele trei bisectoare ale unui triunghi se intersectează într-un punct.

3) Demonstrați că în orice triunghi se poate înscrie o circumferință și numai una singură.

59. Demonstrați că locul geometric al vîrfurilor unghiurilor cu măsura în grade dată laturile cărora trec prin două puncte date, iar vîrfurile se află de aceeași parte a dreptei care unește aceste puncte este o parte de circumferință cu extremitățile în aceste puncte (fig. 87).

Clasa 8

§ 6. PATRULATERE

34. DEFINIȚIA PATRULATERULUI

Se numește *patrulater* figura care constă din patru puncte unite succesiv prin patru segmente. Totodată oricare trei din aceste puncte nu trebuie să se afle pe o dreaptă, iar segmentele ce le unesc, nu trebuie să se intersecteze. Punctele date se numesc *vîrfuri* ale patrulaterului, iar segmentele ce le unesc, — *laturi* ale patrulaterului.

Problemă (1). Figurile 88—90 reprezintă trei figuri fiecare fiind constituită din patru puncte unite succesiv prin patru segmente. Care din aceste figuri este un patrulater?

Rezolvare. Numai figura 90 este patrulater, deoarece în figura 88 punctele *A, B, C* sînt situate pe aceeași dreaptă, iar în figura 89 segmentele *BC* și *AD* se intersectează.

Vîrfurile unui patrulater se numesc *vecine* dacă ele sînt extremități ale unei laturi a lui. Vîrfurile care nu sînt vecine se numesc *opuse*. Segmentele care unesc vîrfurile opuse ale patrulaterului se numesc *diagonale*. Diagonale ale patrulaterului din figura 91 sînt segmentele *AC* și *BD*.

Laturile patrulaterului care pornesc din același vîrf se numesc *laturi vecine*. Laturile care n-au nici o extremitate

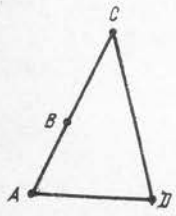


Fig. 88

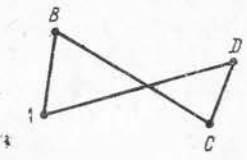


Fig. 89

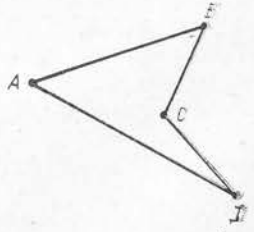


Fig. 90

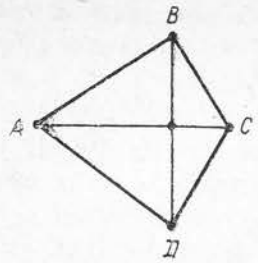


Fig. 91

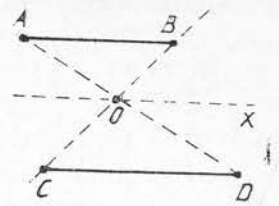


Fig. 92

comună se numesc *laturi opuse*. Laturi opuse ale patrulaterului din figura 91 sînt *AB* și *CD*, *BC* și *AD*.

Un patrulater se notează, indicîndu-se vîrfurile lui. De exemplu, patrulaterul din figura 91 se notează astfel: *ABCD*. La notarea patrulaterului vîrfurile vecine se scriu alături. Patrulaterul *ABCD* din figura 91 poate fi notat astfel: *BCDA* sau *CDAB*. Însă nu poate fi notat: *ABDC* (*B* și *D* nu sînt vîrfuri vecine).

Problemă (2). Dacă patrulaterul *ABCD* are laturile *AB* și *CD* paralele, atunci vîrfurile *A* și *D* se află de aceeași parte a dreptei *BC*. Demonstrați.

Rezolvare. Presupunem că vîrfurile *A* și *D* sînt situate de diferite părți ale dreptei *BC* (fig. 92). Atunci segmentul *AD* intersectează dreapta *BC* într-un punct oarecare *O*. Prin punctul *O* ducem dreapta *x* paralelă cu dreptele *AB* și *CD*. Punctele *A* și *D* sînt situate de diferite părți ale dreptei *x*, deoarece segmentul *AD* intersectează dreapta *x* (în punctul *O*). Deci, punctele *B* și *C* sînt situate de diferite părți ale acestei drepte. De aceea punctul *O* aparține segmentului *BC*. Adică segmentele *BC* și *AD* se intersectează. Iar aceasta e imposibil, deoarece ele sînt laturi ale patrulaterului. Am ajuns la contradicție. Afirmația e demonstrată.

35. PARALELOGRAMUL

Paralelogramul este un patrulater laturile opuse ale căruia sînt paralele, adică sînt situate pe drepte paralele (fig. 93, *a*).

Teorema 6.1. ***Dacă diagonalele unui patrulater se intersectează și se împart în punctul de intersecție în jumătate acest patrulater este un paralelogram.***

Demonstrație. Fie $ABCD$ un patrulater dat și O punctul de intersecție a diagonalelor lui (fig. 93, *b*). Triunghiurile AOD și COB sînt egale. Unghiurile de la vîrful O sînt egale ca unghiuri opuse la vîrf, iar $OD=OB$ și $OA=OC$ din condiția teoremei. Deci, unghiurile OBC și ODA sînt egale. Iar ele sînt unghiuri alterne interne la dreptele AD și BC și secanta DB. Conform teoremei 4.2 dreptele AD și BC sînt paralele. Paralelismul dreptelor AB și CD se demonstrează cu ajutorul egalității triunghiurilor AOB și COD. Teorema este demonstrată.

Teorema 6.2 (reciproca teoremei 6.1). Diagonalele unui paralelogram se intersectează și se împart în punctul de intersecție în jumătate.

Demonstrație. Fie $ABCD$ un paralelogram dat (fig. 94). Ducem diagonala lui BD. Notăm pe ea mijlocul O, iar pe prelungirea segmentului AO depunem segmentul OC_1, egal cu AO. În conformitate cu teorema 6.1 patrulaterul ABC_1D este un paralelogram. Prin urmare, dreapta BC_1 este paralelă cu AD. Însă prin punctul B poate fi dusă o singură dreaptă paralelă cu AD. Deci, dreapta BC_1 coincide cu dreapta BC. La fel se demonstrează că dreapta DC_1 coincide cu dreapta DC. Deci, punctul C_1 coincide cu C. Paralelogramul $ABCD$ coincide cu ABC_1D. De aceea diagonalele lui se intersectează și se împart în punctul de intersecție în jumătate. Teorema e demonstrată.

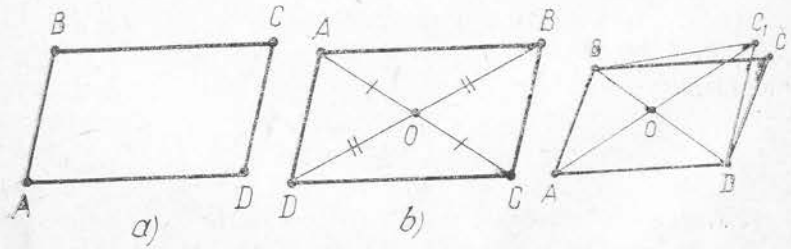


Fig. 93 Fig. 94

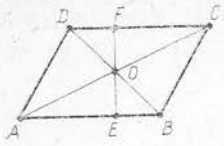


Fig. 95

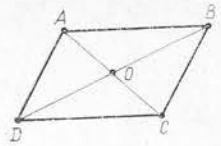


Fig. 96

Problemă (6). Prin punctul de intersecție a diagonalelor unui paralelogram e dusă o dreaptă. Demonstrați că segmentul ei cuprins între laturile paralele se împarte în acest punct în jumătate.

Rezolvare. Fie $ABCD$ un paralelogram dat și EF o dreaptă care intersectează laturile paralele AB și CD (fig. 95). Triunghiurile OAE și OCF sînt egale în conformitate cu criteriul al doilea. Ele au laturile OA și OC egale, deoarece O este mijlocul diagonalei AC (teorema 6.2). Unghiurile de la vîrful O sînt egale ca unghiuri opuse la vîrf, iar unghiurile EAO și FCO sînt egale ca unghiuri alterne la dreptele paralele AB, CD și secanta AC. Din egalitatea triunghiurilor rezultă egalitatea laturilor OE și OF. Ceea ce trebuia demonstrat.

Teorema 6.3. ***Laturile opuse ale unui paralelogram sînt egale.***

Demonstrație. Fie $ABCD$ un paralelogram dat (fig. 96). Ducem diagonalele paralelogramului. Fie O punctul lor de intersecție. Egalitatea laturilor opuse AB și CD rezultă din egalitatea triunghiurilor AOB și COD. Ele au unghiurile de la vîrful O egale ca unghiuri opuse la vîrf, iar $OA=OC$ și $OB=OD$ conform teoremei 6.2.

Exact la fel din egalitatea triunghiurilor AOD și COB rezultă egalitatea altei perechi de laturi opuse — AD și BC.

Egalitatea unghiurilor opuse ABC și CDA rezultă din egalitatea triunghiurilor ABC și CDA (după trei laturi). Conform celor demonstrate $AB=CD$ și $BC=DA$, iar latura AC este comună.

La fel egalitatea unghiurilor opuse BCD și DAB rezultă din egalitatea triunghiurilor BCD și DAB. Teorema e demonstrată.

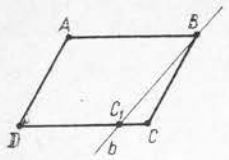


Fig. 97

Problemă (15). Demonstrați că dacă un patrulater are două laturi paralele și egale el este un paralelogram.

Rezolvare. Fie $ABCD$ un patrulater dat care are laturile AB și CD paralele și egale (fig. 97). Prin vîrful B ducem dreapta b paralelă cu latura AD. Această dreaptă intersectează dreapta DC într-un punct oarecare C_1. Patrulaterul ABC_1D este un paralelogram. Conform teoremei 6.3 $C_1D=AB$. Din condiție $AB=CD$. Deci, $DC=DC_1$. De aici rezultă că punctele C și C_1 coincid. Așadar, patrulaterul $ABCD$ coincide cu paralelogramul ABC_1D și, deci, este un paralelogram.

36. DREPTUNGHIUL. ROMBUL. PĂTRATUL

Dreptunghiul este un paralelogram care are toate unghiurile drepte (fig. 98, *a*).

Teorema 6.4. ***Diagonalele dreptunghiului sînt egale.***

Demonstrație. Fie $ABCD$ un dreptunghi dat (vezi fig. 98, *b*).

Afirmația teoremei rezultă din egalitatea triunghiurilor dreptunghice BAD și CDA. Unghiurile BAD și CDA sînt drepte, cateta AD — comună, iar catetele AB și CD sînt egale ca laturi opuse ale paralelogramului. Din egalitatea triunghiurilor rezultă că ipotenuzele lor sînt egale, iar ipotenuzele sînt diagonalele dreptunghiului. Teorema e demonstrată.

Problemă (21). Demonstrați că dacă un paralelogram are toate unghiurile egale el este un dreptunghi.

Fig. 98

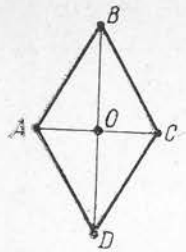


Fig. 99

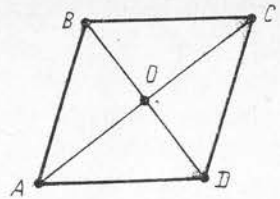


Fig. 100

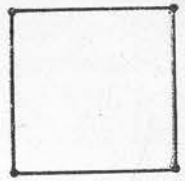


Fig. 101

Rezolvare. Unghiurile unui paralelogram alăturate unei laturi sînt unghiuri interne de aceeași parte a secantei, de aceea suma lor este egală cu 180°. Deoarece conform condiției problemei aceste unghiuri sînt egale, fiecare din ele e drept, iar paralelogramul care are toate unghiurile drepte este un dreptunghi.

Rombul este un paralelogram care are toate laturile egale (fig. 99).

Teorema 6.5. ***Diagonalele unui romb se intersectează sub un unghi drept. Diagonalele unui romb sînt bisectoare ale unghiurilor lui.***

Demonstrație. Fie $ABCD$ un romb dat (fig. 99), O — punctul de intersecție a diagonalelor lui. Conform proprietății paralelogramului $AO=OC$. Deci, în triunghiul isoscel ABC segmentul BO este mediană. Conform proprietății triunghiului isoscel mediana dusă la baza lui este bisectoare și înălțime. Aceasta înseamnă, că diagonala BD este bisectoarea unghiului B și e perpendiculară pe diagonala AC. Teorema e demonstrată.

Problemă (28). Demonstrați că dacă un paralelogram are diagonalele perpendiculare el este un romb.

Rezolvare. Fie $ABCD$ un paralelogram cu diagonalele perpendiculare și O punctul de intersecție a diagonalelor (fig. 100). Triunghiurile AOB și AOD sînt egale conform criteriului întîi de egalitate a triunghiurilor. Unghiurile de la vîrful O sînt drepte conform condiției, latura AO este comună, iar $OB=OD$ conform proprietății paralelogramului (teorema 6.2). Din egalitatea triunghiurilor rezultă egalitatea laturilor:

$$AB=AD.$$

Însă în virtutea teoremei 6.3 $AD=BC$, $AB=CD$. Așadar, toate laturile paralelogramului sînt egale și, deci, el este un romb.

Pătratul este un dreptunghi care are toate laturile egale (fig. 101). Pătratul este de asemenea un romb, de aceea el posedă proprietățile dreptunghiului și rombului.

37. TEOREMA LUI TALES

Teorema 6.6 (teorema lui Tales)*. ***Dacă dreptele paralele care intersectează laturile unui unghi, taie pe una din laturile lui segmente egale atunci aceste drepte taie segmente egale și pe altă latură a lui*** (fig. 102).

Demonstrație. Fie A_1, A_2, A_3 punctele de intersecție a dreptelor paralele cu una din laturile unui unghi și A_2 situat între A_1 și A_3 (fig. 102). Fie B_1, B_2, B_3 punctele corespunzătoare de intersecție a acestor drepte cu cealaltă latură a unghiului. Să demonstrăm că dacă $A_1A_2=A_2A_3$, atunci $B_1B_2=B_2B_3$.

Prin punctul B_2 ducem dreapta EF paralelă cu dreapta A_1A_3. Conform proprietății paralelogramului $A_1A_2=FB_2$, $A_2A_3=B_2E$. Și deoarece $A_1A_2=A_2A_3$, avem $FB_2=B_2E$.

Triunghiurile B_2B_1F și B_2B_3F sînt egale conform criteriului al doilea. $B_2F=B_2E$ în conformitate cu cele demonstrate. Unghiurile de la vîrful B_2 sînt egale ca unghiuri opuse la vîrf, iar unghiurile B_2FB_1 și B_2EB_3 sînt egale ca unghiuri alterne interne la dreptele paralele A_1B_1 și A_3B_3 și secanta EF. Din egalitatea triunghiurilor rezultă egalitatea laturilor: $B_1B_2=B_2B_3$. Teorema e demonstrată.

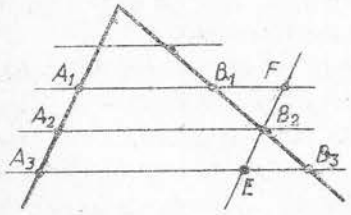


Fig. 102

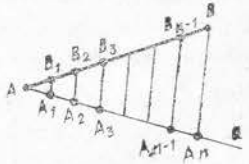


Fig. 103

* Tales din Milet — savant din Grecia Antică care a trăit în sec. VI î.e.n.

Notă. În condiția teoremei lui Tales în locul laturilor unui unghi se pot lua orice două drepte și concluzia teoremei va fi aceeași: dreptele paralele care intersectează două drepte date și care taie segmente egale pe una din aceste drepte taie segmente egale și pe cealaltă dreaptă. Uneori teorema lui Tales se va aplica și în această formă.

Problema 6.7. Să se împartă segmentul dat AB în n părți egale.

Rezolvare. Din punctul A ducem semidreapta a care nu se află pe dreapta AB (fig. 103). Pe semidreapta a depunem segmente egale: AA_1, A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$. Prin punctele A_n și B ducem dreapta b. Dreptele paralele cu b, care trec prin punctele A_1, A_2, ... A_{n-1} intersectează segmentul AB în punctele B_1, B_2, ... B_{n-1}, ce împart segmentul AB în n segmente egale (teorema 6.6).

Linie medie a triunghiului se numește segmentul care unește mijcolurile a două laturi ale triunghiului.

Teorema 6.8. ***Linia medie a unui triunghi unește mijlocurile a două laturi date, este paralelă cu latura a treia și egală cu jumătatea ei.***

Demonstrație. Fie DE linia medie a triunghiului ABC (fig. 104). Ducem din punctul D o dreaptă paralelă cu AB. Conform teoremei 6.6 ea intersectează segmentul AC în mijlocul lui, adică conține linia medie DE. Prima afirmație e demonstrată.

Ducem acum linia medie DF. Ea este paralelă cu latura AC. Patrulaterul $AEDF$ este un paralelogram. Conform proprietății paralelogramului $ED=AF$ și deoarece conform teoremei lui Tales $AF=FB$, avem

$$ED=\frac{1}{2}AB.$$

Teorema e demonstrată.

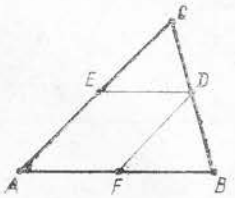


Fig. 104

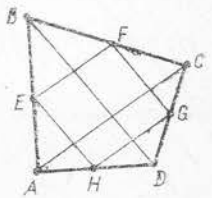


Fig. 105

Problemă (47). Demonstraţi că mijlocurile laturilor unui patrulater sînt vîrfurile unui paralelogram.

Rezolvare. Fie $ABCD$ un patrulater dat şi E, F, G, H mijlocurile laturilor lui (fig. 105), EF linia medie a triunghiului ABC. De aceea $EF \| AC$. GH este linia medie a triunghiului ADC. De aceea $GH \| AC$. Aşadar, $EF \| GH$, adică laturile opuse EF şi GH ale patrulaterului $EFGH$ sînt paralele. Exact la fel se demonstrează paralelismul celeilalte perechi de laturi opuse. Deci, patrulaterul $EFGH$ este un paralelogram.

38. TRAPEZUL

Patrulaterul care are numai două laturi opuse paralele se numeşte *trapez* (fig. 106, *a*). Aceste laturi paralele se numesc *bazele* trapezului. Celelalte două laturi se numesc *laturi laterale*. Trapezul, care are laturile laterale egale, se numeşte *isoscel*. Segmentul care uneşte mijlocurile laturilor laterale se numeşte *linie medie a trapezului*.

Teorema 6.9. ***Linia medie a trapezului este paralelă cu bazele şi este egală cu semisuma lor.***

Demonstraţie. Fie $ABCD$ un trapez dat (fig. 106, *b*). Prin vîrful B şi mijlocul P al laturii CD ducem o dreaptă. Ea intersectează dreapta AD într-un punct oarecare E. Triunghiurile PBC şi PED sînt egale conform criteriului al doilea de egalitate a triunghiurilor. Ele au $CP = DP$ prin construcţie, unghiurile de la vîrful P sînt egale ca unghiuri opuse la vîrf, iar unghiurile PCB şi PDE sînt egale ca unghiuri alterne interne la dreptele paralele BC şi AD şi secanta CD. Din egalitatea triunghiurilor rezultă ega-

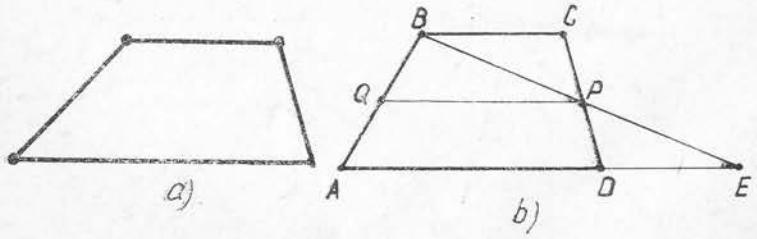


Fig. 106

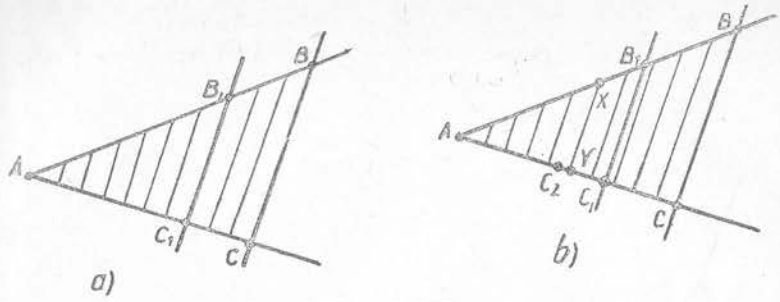


Fig. 107

litatea laturilor $PB = PE$; $BC = ED$. Deci, linia medie PQ a trapezului este linia medie a triunghiului ABE. Conform proprietăţii liniei medii a triunghiului $PQ \| AE$ şi segmentul

$$PQ = \frac{1}{2} AE = \frac{1}{2} (AD + BC)$$

Teorema e demonstrată.

Teorema 6.10 (teorema generalizată a lui Tales) ***Dreptele paralele ce intersectează laturile unui unghi taie pe laturile unghiului segmente proporţionale.***

Demonstraţie. Fie laturile unghiului A intersectate de drepte paralele în punctele B, C şi B_1, C_1 (fig. 107). Teorema afirmă că

$$\frac{AC_1}{AB_1} = \frac{AC}{AB}. \qquad (*)$$

Să demonstrăm justeţea acestei egalităţi. Împărţim segmentul AC în n părţi egale şi prin punctele de diviziune ducem drepte paralele cu dreapta BC. Conform teoremei lui Tales aceste drepte împart segmentul AB în n părţi egale. Dacă punctul C_1 este unul din punctele de diviziune (fig. 107, *a*), atunci $AC_1 = \frac{AC}{n} m$, unde m este numărul de segmente obţinute în urma împărţirii ce se conţin în segmentul AC_1. Respectiv $AB_1 = \frac{AB}{n} m$. Prin urmare

$$\frac{AC_1}{AB_1} = \frac{AC}{AB}.$$

Admitem că punctul C_1 nu este punct de diviziune (fig.

107, *b*). Să demonstrăm că şi în acest caz egalitatea (*) este adevărată. Presupunem că ea nu este adevarată, de exemplu $\frac{AC_1}{AB_1} > \frac{AC}{AB}$. Atunci $AC_1 > \frac{AC}{AB} AB_1$. Depunem pe semidreapta AC segmentul $AC_2 = \frac{AC}{AB} \cdot AB_1$, $AC_2 < AC_1$. Pentru n suficient de mare pe segmentul C_1C_2 vor fi puncte de diviziune. Notăm unul din ele prin Y, iar punctul corespunzător de la latura AB — prin X. Conform celor demonstrate avem

$$\frac{AY}{AX} = \frac{AC}{AB}.$$

În partea stîngă a acestei egalităţi inlocuim marimea AY printr-o mărime mai mică AC_2, iar mărimea AX printr-o mărime mai mare AB_1. Atunci partea stîngă se va micşora şi obţinem $\frac{AC_2}{AB_1} < \frac{AC}{AB}$. De aici $AC_2 < \frac{AC}{AB} \cdot AB_1$. Am ajuns la contradicţie, întrucît $AC_2 = \frac{AC}{AB} \cdot AB_1$.

În mod analog ajungem la contradicţie şi în cazul cînd $\frac{AC_1}{AB_1} < \frac{AC}{AB}$. Teorema e demonstrată.

Problema (53). Demonstraţi că într-un trapez isoscel unghiurile de la bază sînt egale.

Rezolvare. Fie $ABCD$ un trapez isoscel cu bazele AB şi CD, $AB < CD$ (fig. 108). Să demonstrăm că unghiurile trapezului de la baza CD sînt egale. Prin vîrful B ducem o dreaptă paralelă cu latura AD. Ea intersectează semidreapta CD într-un punct E. Deoarece $DE = AB < CD$, punctul E se află pe baza DC. Patrulaterul $ABED$ este un paralelogram. Conform proprietăţii paralelogramului $BE = AD$. Conform condiţiei $AD = BC$ (trapezul e isoscel), deci, triunghiul BCE este isoscel cu baza EC. Unghiurile triunghiului şi ale trapezului de la vîrful C coincid,

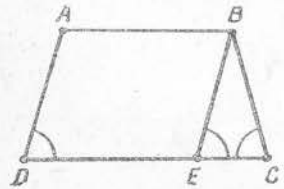


Fig. 108

iar unghiurile de la vîrfurile E şi D sînt egale, fiindcă ele completează unghiul BED pînă la 180°. De aceea $\angle ADC = \angle BCD$. Afirmaţia e demonstrată.

INTREBĂRI PENTRU REPETARE

1. Care figură se numeşte patrulater?
2. Care vîrfuri ale unui patrulater se numesc vecine şi care — opuse?
3. Ce numim diagonale ale unui patrulater?
4. Care laturi ale unui patrulater se numesc vecine? Care laturi se numesc opuse?
5. Cum se notează un patrulater?
6. Ce numim paralelogram?
7. Demonstraţi că dacă diagonalele unui patrulater se intersectează şi se împart în punctul de intersecţie în jumătate patrulaterul este un paralelogram.
8. Demonstraţi că diagonalele unui paralelogram se intersectează şi se împart în punctul de intersecţie în jumătate.
9. Demonstraţi că paralelogramul are laturile opuse egale, unghiurile opuse egale.
10. Ce numim dreptunghi?
11. Demonstraţi că diagonalele dreptunghiului sînt egale.
12. Ce numim romb?
13. Demonstraţi că diagonalele unui romb se intersectează sub un unghi drept; diagonalele rombului sînt bisectoare ale unghiurilor lui.
14. Ce numim pătrat? Enumeraţi proprietăţile pătratului.
15. Demonstraţi teorema lui Tales.
16. Demonstraţi că linia medie a triunghiului este egală cu jumătatea laturii corespunzătoare.
17. Care patrulater se numeşte trapez?
18. Demonstraţi că linia medie a trapezului este egală cu semisuma bazelor.
19. Demonstraţi teorema generalizată a lui Tales.

EXERCIŢII

1. Figurile 88, 89 şi 90 reprezintă trei figuri, fiecare fiind constituită din patru puncte unite succesiv prin patru segmente. Care din aceste figuri este patrulater?
2. Dacă patrulaterul $ABCD$ are laturile AB şi CD paralele atunci vîrfurile A şi D se află de aceeaşi parte a dreptei BC. Demonstraţi.
3. Cîte paralelograme pot fi construite cu vîrfurile în trei

puncte date care nu aparţin unei drepte?

4. Latura laterală a unui triunghi isoscel este egală cu 5 m. Dintr-un punct luat pe baza acestui triunghi sînt duse două drepte paralele cu laturile laterale. Aflaţi perimetrul (suma lungimilor tuturor laturilor) paralelogramului obţinut.
5. Patrulaterul $ABCD$ este un paralelogram cu perimetrul de 10 cm. Aflaţi lungimea diagonalei BD, ştiind că perimetrul triunghiului ABD este egal cu 8 cm.
6. Prin punctul de intersecţie a diagonalelor unui paralelogram e dusă o dreaptă. Demonstraţi că segmentul ei cuprins între laturile paralele se împarte în acest punct în jumătate.
7. În paralelogramul $ABCD$ prin punctul de intersecţie a diagonalelor e dusă o dreaptă care taie pe laturile BC şi AD segmentele $BE=2$ m şi $AF=2{,}8$ m. Aflaţi laturile BC şi AD.
8. Unul din unghiurile unui paralelogram este egal cu 40°. Aflaţi celelalte unghiuri.
9. Calculaţi unghiurile unui paralelogram, ştiind că unul din ele e mai mare decît celălalt cu 50°.
10. Poate oare un unghi al paralelogramului să fie egal cu 40°, iar celălalt — cu 50°?
11. O diagonală a unui paralelogram formează cu două laturi ale lui unghiuri de 25° şi 35°. Aflaţi unghiurile paralelogramului.
12. Aflaţi toate unghiurile unui paralelogram dacă suma a două din ele este egală cu: 1) 80°; 2) 100°; 3) 160°.
13. Aflaţi toate unghiurile paralelogramului dacă diferenţa a două din ele este egală cu: 1) 70°; 2) 110°; 3) 140°.
14. În paralelogramul $ABCD$ punctul E este mijlocul laturii BC, iar F — mijlocul laturii AD. Demonstraţi că patrulaterul $BEDF$ este paralelogram.
15. Demonstraţi că dacă un patrulater are două laturi paralele şi egale atunci el este paralelogram.
16. În paralelogramul $ABCD$ e dusă bisectoarea unghiului A, care intersectează latura BC în punctul E. Cu ce sînt egale segmentele BE şi EC, dacă $AB=9$ cm, $AD=15$ cm.
17. Două laturi ale unui paralelogram se raportă ca 3 : 4, iar perimetrul lui este egal cu 2,8 m. Aflaţi laturile.
18. În paralelogramul $ABCD$ perpendiculara coborîtă din vîrful B pe latura AD o împarte în jumătate. Aflaţi diagonala BD şi laturile paralelogramului dacă se ştie că perimetrul paralelogramului este egal cu 3,8 m, iar perimetrul triunghiului ABD este egal cu 3 m.

19. Construiţi un paralelogram: 1) după două laturi şi o diagonală; 2) după o latură şi două diagonale.
20. Construiţi un paralelogram: 1) după două laturi şi un unghi; 2) după diagonale şi un unghi dintre ele.
21. Demonstraţi că dacă un paralelogram are toate unghiurile egale el este un dreptunghi.
22. Demonstraţi că dacă un paralelogram are diagonalele egale el este un dreptunghi.
23. Bisectoarea unuia din unghiurile dreptunghiului împarte latura dreptunghiului în jumătate. Aflaţi perimetrul dreptunghiului dacă latura lui mai mică este egală cu 10 cm.
24. Într-un dreptunghi punctul de intersecţie a diagonalelor e depărtat de latura mai mică cu 4 cm mai mult decît de latura mai mare. Perimetrul dreptunghiului este egal cu 56 cm. Aflaţi laturile dreptunghiului.
25. Dintr-un punct al unei circumferinţe sînt duse două coarde perpendiculare care sînt depărtate de centru cu 6 cm. Aflaţi lungimile lor.
26. Într-un triunghi dreptunghic fiecare catetă a căruia este egală cu 6 cm e înscris un dreptunghi care are un unghi comun cu triunghiul. Aflaţi perimetrul dreptunghiului.
27. Într-un triunghi dreptunghic isoscel e înscris un dreptunghi astfel încît două vîrfuri ale lui se află pe ipotenuză, iar celelalte două — pe catete. Cu ce sînt egale laturile dreptunghiului dacă se ştie că ele se raportă ca 5 : 2, iar ipotenuza triunghiului este egală cu 45 cm?
28. Demonstraţi că dacă un paralelogram are diagonalele perpendiculare, el este un romb.
29. Demonstraţi că dacă diagonala unui paralelogram este bisectoare a unghiurilor lui el este un romb.
30. Unghiurile, formate de diagonalele unui romb cu una din laturile lui, se raportă ca 4 : 5. Aflaţi unghiurile rombului.
31. Demonstraţi că patrulaterul, care are toate laturile egale, este romb.
32. Într-un romb una din diagonale este egală cu latura. Aflaţi unghiurile rombului.
33. Construiţi un romb: 1) după un unghi şi diagonale care pleacă din vîrful acestui unghi; 2) după o diagonală şi vîrful opus.
34. Construiţi un romb: 1) după latură şi diagonală; 2) după cele două diagonale.
35. Într-un triunghi dreptunghic isoscel, fiecare catetă a căruia este de 2 m, e înscris un pătrat care are cu el un unghi comun. Aflaţi perimetrul pătratului.

36. Este dat un pătrat $ABCD$. Pe fiecare din laturile lui sînt depuse segmentele egale: $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$. Demonstrați că patrulaterul $A_1B_1C_1D_1$ este un pătrat.

37. Diagonala unui pătrat este egală cu 4 m. Latura lui este egală cu diagonala altui pătrat. Aflați latura ultimului pătrat.

38. Este dat un pătrat cu latura de 1 m, diagonala lui este egală cu latura altui pătrat. Aflați diagonala ultimului pătrat.

39. Într-un pătrat e înscris un dreptunghi astfel încît pe fiecare latură a lui se află un vîrf al dreptunghiului și laturile dreptunghiului sînt paralele cu diagonalele pătratului. Aflați laturile dreptunghiului, știind că una din ele e de două ori mai mare decît cealaltă și că diagonala pătratului este egală cu 12 m.

40. Într-un triunghi dreptunghic isoscel e înscris un pătrat astfel încît două vîrfuri ale lui se află pe ipotenuză, iar celelalte două — pe catete. Aflați latura pătratului dacă se știe că ipotenuza este egală cu 3 m.

41. Dintr-un punct exterior sînt duse la o circumferință două tangente perpendiculare; raza circumferinței este de 10 cm. Aflați lungimile tangentelor (distanța de la punctul dat la punctul de tangență).

42. Laturile unui triunghi sînt egale cu 8 cm, 10 cm, 12 cm. Aflați laturile triunghiului vîrfurile căruia sînt mijloacele laturilor triunghiului dat.

43. Perimetrul unui triunghi este egal cu 12 cm; mijloacele laturilor sînt unite prin segmente. Aflați perimetrul triunghiului obținut.

44. Linia medie a unui triunghi isoscel, paralelă cu baza, este egală cu 3 cm. Aflați laturile triunghiului dacă perimetrul lui este egal cu 16 cm.

45. Cum se construiește un triunghi dacă sînt date mijloacele laturilor lui?

46. Demonstrați că vîrfurile unui triunghi sînt egal depărtate de dreapta care trece prin mijloacele a două laturi ale lui.

47. Demonstrați că mijloacele laturilor unui patrulater sînt vîrfurile unui paralelogram.

48. Aflați laturile paralelogramului din problema precedentă dacă se știe că diagonalele patrulaterului sînt egale cu 10 m și 12 m.

49. Diagonalele unui patrulater sînt egale cu a și b. Aflați perimetrul patrulaterului vîrfurile căruia sînt mijloacele laturilor patrulaterului dat.

50. Demonstrați că mijloacele laturilor unui dreptunghi sînt

vîrfuri ale unui romb. Și reciproc, mijloacele laturilor unui romb sînt vîrfuri ale unui dreptunghi.

51. Împărțiți un segment dat într-un număr indicat de părți egale: 1) 3; 2) 5; 3) 6.

52. O latură laterală a unui trapez e împărțită în trei părți egale și prin punctele de diviziune sînt duse la cealaltă latură segmente paralele cu bazele. Aflați lungimile acestor segmente dacă bazele trapezului sînt egale cu 2 m și 5 m.

53. Demonstrați că trapezul isoscel are unghiurile de la bază egale.

54. Cu ce sînt egale unghiurile unui trapez isoscel dacă se știe că diferența unghiurilor opuse este egală cu 40°?

55. Baza mare a unui trapez isoscel este egală cu 2,7 m, latura laterală cu 1 m, unghiul dintre ele e de 60°. Aflați baza mică.

56. Într-un trapez isoscel înălțimea dusă din vîrful obtuz împarte baza mare în segmente de 6 cm și 30 cm. Aflați bazele trapezului.

57. Baza mică a unui trapez isoscel este egală cu latura laterală, iar diagonala e perpendiculară pe latura laterală. Aflați unghiurile trapezului.

58. De aceeași parte a unei drepte sînt date două puncte A și B la distanțele de 10 m și 20 m de la ea. Aflați distanța de la mijlocul segmentului AB la dreapta dată.

59. De diferite părți ale unei drepte sînt date două puncte A și B la distanțele de 10 cm și 4 cm de la ea. Aflați distanța de la mijlocul segmentului AB la dreapta dată.

60. Demonstrați că segmentul care unește mijloacele diagonalelor unui trapez este paralel cu bazele și egal cu semidiferența bazelor.

61. Bazele unui trapez se raportă ca 2 : 3, iar linia medie este egală cu 5 m. Aflați bazele.

62. Extremitățile unui diametru sînt depărtate de tangenta la o circumferință cu 1,6 și 0,6 m. Aflați lungimea diametrului.

63. Linia medie a unui trapez este egală cu 7 cm, iar una din baze este mai mare decît cealaltă cu 4 cm. Aflați bazele trapezului.

64. Înălțimea dusă din vîrful unghiului obtuz al unui trapez isoscel împarte baza mare în părți care au lungimile a și b $(a > b)$. Aflați linia medie a trapezului.

65. Construiți un trapez după bazele și laturile lui laterale.

66. Construiți un trapez după bazele și diagonalele lui.

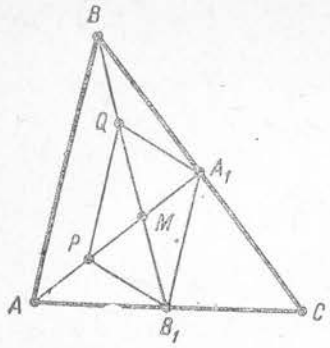


Fig 109

67. 1) În triunghiul ABC sînt duse medianele AA_1 şi BB_1 care se intersectează în punctul M (fig. 109). În triunghiul AMB este dusă linia medie PQ. Demonstraţi că patrulaterul A_1B_1PQ este un paralelogram.
2) Demonstraţi că oricare două mediane ale unui triunghi se intersectează şi se împart în punctul de intersecţie în raportul 2 : 1 considerînd de la vîrf.
3) Demonstraţi că toate cele trei mediane ale unui triunghi se intersectează în acelaşi punct.

68. Demonstraţi că suma unghiurilor opuse ale unui patrulater înscris într-o circumferinţă este egală cu 180°.

69. Demonstraţi că sumele lungimilor laturilor opuse ale unui patrulater circumscris unei circumferinţe sînt aceleaşi.

§ 7. TEOREMA LUI PITAGORA

39. COSINUSUL UNUI UNGHI

Se numeşte *cosinus* al unghiului ascuţit al unui triunghi dreptunghic raportul catetei alăturate către ipotenuză. Cosinusul unghiului α se notează astfel: $\cos\alpha$. Cosinusul unghiului depinde numai de măsura în grade a unghiului şi nu depinde de dimensiunile triunghiului şi de amplasarea lui, adică în două triunghiuri cu unul şi acelaşi unghi ascuţit cosinusurile acestui unghi sînt egale.

Teorema 7.1. ***Cosinusul unghiului depinde numai de măsura în grade a unghiului.***

Demonstraţie. Fie ABC şi $A'B'C'$ două triunghiuri dreptunghice cu unul şi acelaşi unghi de la vîrfurile A şi A' egal cu α (fig. 110). Trebuie să demonstrăm că

$$\frac{A'C'}{A'B'} = \frac{AC}{AB}. \qquad (*)$$

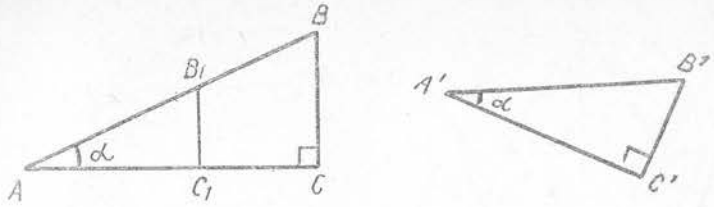


Fig. 110

Pe semidreapta AB depunem segmentul AB_1 egal cu segmentul $A'B'$, iar pe semidreapta AB — segmentul AC_1 egal cu segmentul $A'C'$. Triunghiurile AB_1C_1 şi $A'B'C'$ sînt egale după criteriul întîi. Ele au unghiurile de la vîrfurile A şi A' egale cu α, iar $A'B'=AB_1$, $A'C'=AC_1$ după construcţie. De aceea unghiul AC_1B_1 este drept şi, deci, dreptele BC şi B_1C_1 fiind perpendiculare pe dreapta AC sînt paralele. Conform teoremei generalizate a lui Tales avem

$$\frac{AC_1}{AB_1} = \frac{AC}{AB}.$$

Întrucît $AC_1=A'C'$, $AB_1=A'B'$ după construcţie rezultă că

$$\frac{A'C'}{A'B'} = \frac{AC}{AB}.$$

Teorema e demonstrată.

40. TEOREMA LUI PITAGORA

Teorema 7.2 (terema lui Pitagora*). ***Într-un triunghi dreptunghic pătratul ipotenuzei este egal cu suma pătratelor catetelor.***

Demonstraţie. Fie ABC un triunghi dreptunghic dat cu unghiul drept C Ducem înălţimea CD din vîrful unghiului drept C (fig. 111).

În conformitate cu definiţia cosinusului unghiului

$$\cos A = \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}.$$

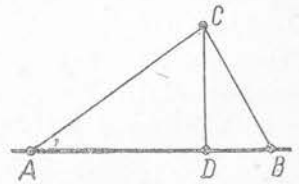


Fig 111

* Pitagora — savant din Grecia Antică care a trăit în sec. VI î.e.n.

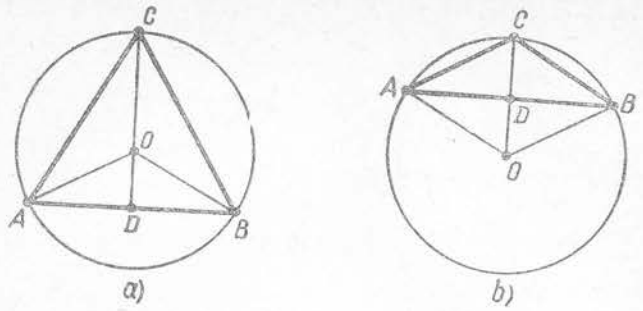


Fig. 112

De aici $AB \cdot AD = AC^2$.

În mod analog

$$\cos B = \frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB}.$$

De aici $AB \cdot BD = BC^2$. Adunînd parte cu parte egalităţile obţinute şi observînd că $AD + DB = AB$ avem:

$$AC^2 + BC^2 = AB(AD + DB) = AB^2.$$

Teorema e demonstrată.

Din teorema lui Pitagora rezultă că ***într-un triunghi dreptunghic orice catetă e mai mică decît ipotenuza.*** De aici, la rîndul său, rezultă că ***cos $\alpha < 1$ pentru orice unghi ascuţit α.***

Problemă (16). Aflaţi raza circumferinţei circumscrise unui triunghi isoscel cu baza a şi latura laterală b.

Rezolvare. Aflăm înălţimea CD (fig. 112) coborîtă pe bază. Conform teoremei lui Pitagora

$$CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

Notăm raza circumferinţei circumscrise prin R. Dacă centrul O al circumferinţei se află pe înălţimea CD (fig. 112, a), $OD = CD - R$. Dacă centrul circumferinţei se află pe prelungirea înălţimii (fig. 112, b), $OD = R - CD$ Conform teoremei lui Pitagora $AO^2 = OD^2 + AD^2$ sau

$$R^2 = \left(\sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} - R\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

De aici aflăm

$$R = \frac{b^2}{2\sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}}$$

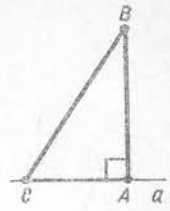


Fig. 113

Fie BA perpendiculara, coborîtă din punctul B pe dreapta a, şi C orice punct al dreptei a, diferit de A. Segmentul BC se numeşte *oblica* dusă din punctul B la dreapta a (fig. 113). Punctul C se numeşte *piciorul oblicei*. Segmentul AC se numeşte *proiecţie a oblicei*.

Din teorema lui Pitagora rezultă că dacă la o dreaptă din acelaşi punct sînt duse perpendiculara şi cîteva oblice, ***oblica e mai mare decît perpendiculara; oblicele egale au proiecţii egale; din două oblice mai mare e acea oblică care are proiecţie mai mare.***

Problemă (21). Laturile unui triunghi sînt a, b, c. Aflaţi înălţimea triunghiului coborîtă pe latura c.

Rezolvare. Notăm prin x proiecţia laturii a pe dreapta care conţine latura c. Atunci proiecţia laturii b pe această dreaptă este sau $c - x$ (fig. 114, a) sau $c + x$ (fig. 114, b). Conform teoremei lui Pitagora în primul caz

$$CD^2 = a^2 - x^2, \quad CD^2 = b^2 - (c - x)^2$$

De aici obţinem ecuaţia:

$$a^2 - x^2 = b^2 - (c - x)^2.$$

O rezolvăm:

$$a^2 - x^2 = b^2 - c^2 + 2cx - x^2, \quad a^2 = b^2 - c^2 + 2cx.$$

$$x = \frac{1}{2c}(a^2 - b^2 + c^2).$$

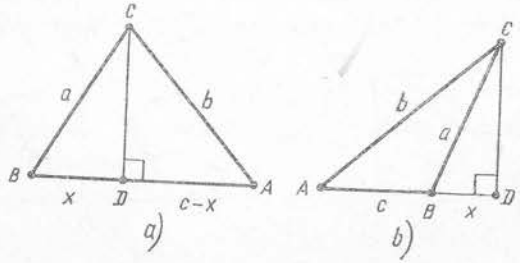


Fig. 114

Aflăm înălțimea CD:

$$CD=\sqrt{a^2-\frac{1}{4c^2}(a^2-b^2+c^2)^2}.$$

În cazul al doilea se obține același răspuns. Efectuați calculele de sine stătator.

41. RELAȚIILE DINTRE LATURI ȘI UNGHIURI ÎNTR-UN TRIUNGHI DREPTUNGHIC

Fie ABC un triunghi dreptunghic cu unghiul drept C și unghiul ascuțit de la vîrful A, egal cu α (fig. 115). Conform definiției $\cos\alpha$ *este egal cu raportul catetei alăturate unghiului* α *către ipotenuză.*

Se numește *sinus al unghiului* α (se notează $\sin\alpha$) raportul catetei opuse BC către ipotenuza AB:

$$\sin\alpha=\frac{BC}{AB}.$$

Se numește *tangentă a unghiului* α (se notează $\operatorname{tg}\alpha$) raportul catetei opuse BC către cateta alăturată AC:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{BC}{AC}.$$

Sinusul și tangenta unghiului ta fel ca și cosinusul depind numai de mărimea unghiului.

Într-adevăr conform teoremei lui Pitagora

$$BC=\sqrt{AB^2-AC^2},$$

$$\sin\alpha=\frac{BC}{AB}=\sqrt{1-\left(\frac{AC}{AB}\right)^2}=\sqrt{1-\cos^2\alpha}.$$

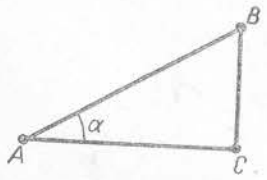


Fig. 115

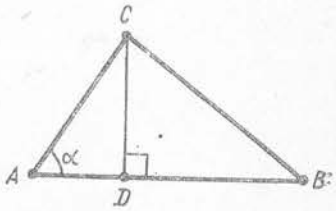


Fig. 116

Deoarece $\cos\alpha$ depinde numai de mărimea unghiului, atunci și $\sin\alpha$ depinde numai de mărimea unghiului. Mai departe

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{BC}{AC}=\frac{BC}{AB}:\frac{AC}{AB}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

De aici se vede că și $\operatorname{tg}\alpha$ depinde numai de mărimea unghiului.

Din definiția $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ și $\operatorname{tg}\alpha$ obținem următoarele reguli:

Cateta opusă unghiului α ***este egală cu produsul ipotenuzei prin*** $\sin\alpha$.

Cateta alăturată unghiului α ***este egală cu produsul ipotenuzei prin*** $\cos\alpha$.

Cateta opusă unghiului α ***este egală cu produsul catetei a doua prin*** $\operatorname{tg}\alpha$.

Aceste reguli ne permit, cunoscînd una din laturile unui triunghi dreptunghic și un unghi ascuțit, să aflăm celelalte două laturi; cunoscînd două laturi, să aflăm unghiurile ascuțite.

Problemă (31). Într-un triunghi dreptunghic sînt date ipotenuza c și unghiul ascuțit α. Aflați catetele, proiecțiile lor pe ipotenuză și înălțimea coborîtă pe ipotenuză.

Rezolvare (fig. 116). $AC=AB\cos\alpha=c\cos\alpha$;

$BC=AB\sin\alpha=c\sin\alpha$; $BD=BC\sin\alpha=c\sin^2\alpha$;

$AD=AC\cos\alpha=c\cos^2\alpha$; $CD=AC\sin\alpha=c\sin\alpha\cos\alpha$.

Din aceste expresii se obțin următoarele relații:

$$AC=\sqrt{AB\cdot AD},\quad BC=\sqrt{AB\cdot BD},\quad CD=\sqrt{AD\cdot BD}.$$

E folositor să memorizăm aceste relații. Ele se exprimă prin cuvinte astfel.

Cateta unui triunghi dreptunghic este media proporțională dintre ipotenuză și proiecția acestei catete pe ipotenuză.

Înălțimea triunghiului dreptunghic coborîtă din vîrful unghiului drept este media proporțională dintre proiecțiile catetelor pe ipotenuză.

Denumirea „medie proporțională" este justificată prin faptul că numărul $x=\sqrt{ab}$ este termenul mediu al proporției $a:x=x:b$.

42. CUM SE UTILIZEAZĂ TABLELE SINUSURILOR, COSINUSURILOR ŞI TANGENTELOR

Pentru $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ şi $\operatorname{tg}\alpha$ sînt compuse table speciale. Aceste table ne permit după unghiul dat α să aflăm $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ şi $\operatorname{tg}\alpha$ sau după valorile $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ să aflăm unghiul respectiv. Vom explica cum se folosesc aceste table luînd drept exemplu rezolvarea problemei 32.

Problemă (32). 1) Folosind tablele, găsiţi $\sin 22°$, $\sin 22°36'$, $\sin 22°38'$, $\sin 22°41'$; $\cos 68°$, $\cos 68°18'$, $\cos 68°20'$, $\cos 68°23'$.

2) Găsiţi unghiul x, dacă $\sin x=0{,}2840$; $\sin x=0{,}2844$; $\cos x=0{,}2710$.

Rezolvare (vezi tablele lui V. M. Bradis, pag. 53). 1) Să găsim $\sin 22°$. În prima coloană a tablei căutăm 22°. Apoi mişcîndu-ne pe orizontală alături în coloana a doua vedem numărul 0,3746. Acesta este $\sin 22°$.

Să găsim $\sin 22°36'$. Din nou căutăm 22° în prima coloană. Apoi mişcîndu-ne pe orizontală pornind de la 22° căutăm coloana care are sus notat 36′. În această coloană se află $\sin 22°36'$. El este egal cu 0,3843.

Să găsim $\sin 22°38'$. Căutăm numărul care este multiplul lui 6 şi este cel mai apropiat de 38. Acesta e numărul 36. Găsim $\sin 22°36'$ şi adăugăm la el corecţia de 2′. Corecţiile de 1′, 2′, 3′ sînt date în ultimele trei coloane ale tablei. În rîndul unde este 22° găsim corecţia de 2′. Ea este egală cu 5. Acum găsim $\sin 22°38'=0{,}3843+0{,}0005=0{,}3848$.

Să găsim $\sin 22°41'$. Căutăm $\sin 22°42'$ şi scădem corecţia de 1′. Găsim $\sin 22°41'=0{,}3856$.

Valorile cosinusului pot fi obţinute cu ajutorul tablei sinusurilor folosind egalitatea $\cos\alpha=\sin(90°-\alpha)$ (ea va fi demonstrată în teorema 7.3). Însă cosinusul poate fi găsit şi direct. Să găsim $\cos 68°$. Căutăm în coloana a patra din dreapta tablei 68°. Alături de el în stînga este numărul 0,3746. Acesta este $\cos 68°$. Observăm că $\cos 68°=\cos(90°-22°)=\sin 22°$. Iar $\sin 22°$ de asemenea este egal cu 0,3746.

Să găsim $\cos 68°18'$. Căutăm rîndul unde este 68°. Ne mişcăm pe această linie în stînga. În coloana unde jos este 18′ găsim $\cos 68°18'$. El este egal cu 0,3697.

Pentru a găsi $\cos 68°20'$ luăm $\cos 68°18'$ şi ţinem cont de corecţia de 2′. Corecţia trebuie scăzută. Obţinem $\cos 68°20'=0{,}3697-0{,}0005=0{,}3692$.

Pentru a găsi $\cos 68°23'$ luăm $\cos 68°24'$ şi ţinem cont de corecţia de 1′. Ea trebuie adunată. Obţinem $\cos 68°23'=0{,}3681+0{,}0003=0{,}3684$.

Lucrînd cu corecţiile trebuie să avem în vedere că la mărirea unghiului sinusul se măreşte, iar cosinusul se micşorează (vezi teorema 7.4). De aceea nu e greu să ne pricepem, se adună corecţia sau se scade.

Valorile tangentei după tabla tangentelor se găsesc la fel ca şi valorile sinusului după tabla sinusurilor.

2) Să găsim acum unghiul x pentru care $\sin x=0{,}2840$. Căutăm în tabla sinusurilor numărul 0,2840. Vedem că acest număr se află în rîndul unde în stînga este 16° şi în coloana unde sus este 30′. Deci, $x=16°30'$.

Să găsim x, pentru care $\sin x=0{,}2844$. Căutăm în tabla sinusurilor numărul 0,2844 sau cel mai apropiat de el. Cel mai apropiat număr este 0,2840. Acesta este $\sin 16°30'$. Dacă adunăm corecţia de 1′ obţinem 0,2843. Dacă adunăm corecţia de 2′ obţinem 0,2846. De aceea cu precizie de 1′ trebuie să considerăm că $x=16°31'$.

Să găsim x pentru care $\cos x=0{,}2710$. Căutăm în tablă numărul 0,2710 sau cel mai apropiat de el. Acest număr este 0,2706. El este $\cos 74°18'$. Numărul nostru este mai mare. Deci unghiul e mai mic. Corecţia de 1′ este 0,0003, iar de 2′ este 0,0006. Luăm corecţia de 1′. Obţinem cu precizie de 1′ unghiul $x=0{,}74°17'$.

Unghiul după valoarea tangentei se caută cu ajutorul tablei tangentelor la fel cum se caută unghiul după valoarea sinusului cu ajutorul tablei sinusurilor.

43. IDENTITĂȚILE TRIGONOMETRICE FUNDAMENTALE

Vom demonstra următoarele identități:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\quad 1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha},\quad 1+\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Luăm un triunghi dreptunghic arbitrar ABC cu unghiul de la vîrful A, egal cu α (fig. 117). Conform teoremei lui Pitagora

$$BC^2+AC^2=AB^2.$$

Împărțim ambele părți ale egalității la AB^2. Obținem:

$$\left(\frac{BC}{AB}\right)^2+\left(\frac{AC}{AB}\right)^2=1.$$

Însă $\frac{BC}{AB}=\sin\alpha$, $\frac{AC}{AB}=\cos\alpha$. Așadar,

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$$

Această egalitate este o identitate. Ea este adevărată pentru orice unghi ascuțit α.

Pentru a obține identitatea a doua, împărțim ambele părți ale identității obținute la $\cos^2\alpha$. Obținem:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}\quad\text{sau}\quad 1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Dacă împărțim la $\sin^2\alpha$ ambele părți ale identității $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ obținem a treia identitate:

$$1+\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Importanța acestor identități constă în faptul că ele ne permit, cunoscînd una din valorile $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ sau $\operatorname{tg}\alpha$, să găsim pe celelalte două.

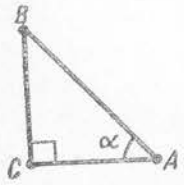


Fig. 117

Problemă (47). Calculați valorile $\sin\alpha$ și $\operatorname{tg}\alpha$, dacă $\cos\alpha=\frac{5}{13}$.

Rezolvare. Deoarece $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, avem

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=\frac{12}{13};$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{12}{5}.$$

44. VALORILE SINUSULUI, COSINUSULUI ȘI TANGENTEI UNOR UNGHIURI

Teorema 7.3. *Pentru orice unghi ascuțit* α

$$\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha,\quad \cos(90°-\alpha)=\sin\alpha.$$

Demonstrație. Fie ABC un triunghi dreptunghic ascuțit α de la vîrful A (fig. 118). Atunci unghiul ascuțit de la vîrful B este egal cu $90°-\alpha$. Conform definiției

$$\sin\alpha=\frac{BC}{AB},\qquad \cos\alpha=\frac{AC}{AB}.$$

$$\sin(90°-\alpha)=\frac{AC}{AB},\qquad \cos(90°-\alpha)=\frac{BC}{AB}.$$

Din egalitățile a doua și a treia obținem:

$$\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha.$$

Din prima și cea de-a patra egalitate obținem

$$\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha.$$

Teorema e demonstrată.

Să găsim *sinusul, cosinusul* și *tangenta* unghiului de 45°. Pentru aceasta construim un triunghi dreptunghic cu un unghi ascuțit de 45° (fig. 119). Al doilea unghi ascuțit este de asemenea de 45°, de aceea triunghiul este isoscel. Fie ca-

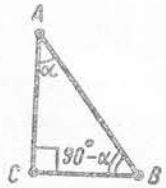


Fig. 118

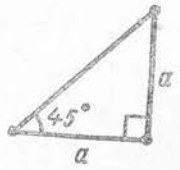


Fig. 119

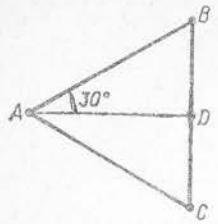


Fig. 120

tetele triunghiului egale cu a. Conform teoremei lui Pitagora ipotenuza este $a\sqrt{2}$. Găsim:

$$\sin 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 45° = \frac{a}{a} = 1.$$

Să găsim *sinusul, cosinusul* şi *tangenta* unghiului de 30°. Luăm un triunghi echilateral ABC (fig. 120). Ducem în el mediana AD. Ea este bisectoare şi înălţime. De aceea triunghiul ABD este dreptunghic cu unghiul ascuţit de la vîrful A de 30°. Fie a latura triunghiului echilateral. Atunci $BD = \frac{a}{2}$. Conform teoremei lui Pitagora

$$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Deci,

$$\sin 30° = \frac{a}{2} : a = \frac{1}{2}; \quad \cos 30° = \frac{a\sqrt{3}}{2} : a = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

În conformitate cu teorema 7.3.

$$\sin 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos 60° = \sin 30° = \frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg} 60° = \frac{\sin 60°}{\cos 60°} = \sqrt{3}.$$

45. VARIAŢIA SIN α, COS α, TG α LA CREŞTEREA UNGHIULUI

Teorema 7.4. ***La creşterea unghiului ascuţit sin α şi tg α cresc, iar cos α descreşte.***

Demonstraţie. Fie α şi β unghiuri ascuţite şi $\alpha < \beta$. Depunem unghiurile α şi β de la semidreapta AB în acelaşi

semiplan (fig. 121). Prin punctul B ducem o dreaptă perpendiculară pe AB. Ea intersectează laturile unghiurilor noastre în punctele C şi D. Deoarece $\alpha < \beta$, punctul C e situat între B şi D. De aceea $BC < BD$. Deci în conformitate cu proprietatea oblicelor duse din acelaşi punct la o dreaptă, $AC < AD$. Deoarece

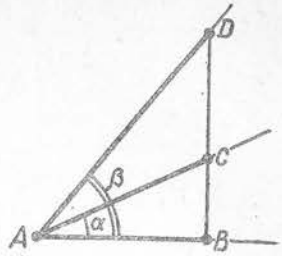


Fig. 121

$$\cos\alpha = \frac{AB}{AC}, \quad \cos\beta = \frac{AB}{AD},$$

avem $\cos\alpha > \cos\beta$, adică la creşterea unghiului cosinusul descreşte.

Deoarece $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$, iar $\cos\alpha$ descreşte la creşterea unghiului, atunci $\sin\alpha$ creşte.

Deoarece $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ şi $\sin\alpha$ creşte, iar $\cos\alpha$ descreşte la creşterea lui α, $\operatorname{tg}\alpha$ creşte la creşterea lui α. Teorema e demonstrată.

46. INEGALITATEA TRIUNGHIULUI

Dacă punctele A şi B sînt diferite, *distanţa* dintre ele se numeşte lungimea segmentului AB. Dacă punctele A şi B coincid distanţa dintre ele se acceptă egală cu zero.

Se numeşte *inegalitate a triunghiului* proprietatea distanţelor dintre trei puncte care se exprimă prin următoarea teoremă.

Teorema 7.5. ***Oricare ar fi trei puncte distanţa dintre oarecare două din aceste puncte nu e mai mare decît suma distanţelor de la ele pînă la cel de-al treilea punct.***

Demonstraţie. Fie A, B, C trei puncte date. Dacă două puncte din trei sau toate cele trei puncte coincid, afirmaţia teoremei este evidentă. Dacă toate punctele sînt diferite şi aparţin unei drepte, unul din ele e situat între celelalte două, de exemplu B. În acest caz $AB + BC = AC$. De aici este evident că fiecare din trei distanţe nu e mai mare decît suma celorlalte două.

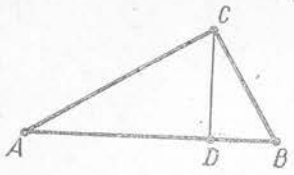


Fig. 122

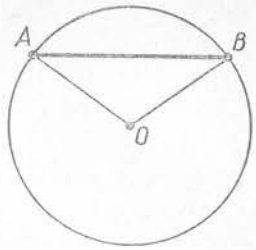


Fig. 123

Admitem acum că punctele nu aparţin unei drepte (fig. 122). Să demonstrăm că $AB<AC+BC$. Coborîm perpendiculara CD pe dreapta AB. Deoarece într-un triunghi dreptunghic cateta e mai mică decît ipotenuza, $AD<AC$, $BD<BC$.

Conform celor demonstrate $AB \leqslant AD+BD$. Prin urmare $AB<AC+BC$. Teorema e demonstrată.

Observăm că în cazul cînd punctele nu aparţin unei drepte în inegalitatea triunghiului avem o inegalitate strictă. Aceasta înseamnă că ***în orice triunghi fiecare latură e mai mică decît suma celorlalte două laturi.***

Problemă (70). Demonstraţi că orice coardă a circumferinţei nu e mai mare decît diametru şi este egală cu diametru numai atunci, cînd ea însăşi este diametru.

Rezolvare (fig. 123). În virtutea inegalităţii triunghiului $AB \leqslant OA+AB=2R$ şi dacă centrul O nu aparţine segmentului AB, inegalitatea este strictă. Egalitatea are loc numai în cazul, cînd coarda trece prin centru, adică este diametru.

ÎNTREBĂRI PENTRU REPETARE

1. Daţi definiţia cosinusului unui unghi ascuţit al triunghiului dreptunghic.
2. Demonstraţi că cosinusul unghiului depinde numai de măsura în grade a unghiului.
3. Demonstraţi teorema lui Pitagora.
4. Demonstraţi că într-un triunghi dreptunghic ipotenuza e mai mare decît orice catetă.
5. Demonstraţi că $\cos\alpha<1$ pentru orice unghi ascuţit α.
6. Demonstraţi că dacă dintr-un punct sînt duse la o dreaptă perpendiculara şi cîteva oblice, oblica e mai mare

decît perpendiculara. Oblicele egale au proiecţii egale, din două oblice e mai mare acea oblică care are proiecţie mai mare.

7. Daţi definiţia sinusului şi tangentei unui unghi ascuţit. Demonstraţi că ele depind numai de măsura în grade a unghiului.
8. Cum se exprimă o catetă a triunghiului dreptunghic prin ipotenuză şi un unghi ascuţit, printr-un unghi ascuţit şi cealaltă catetă?
9. Explicaţi cum se găseşte din tablă valoarea sinusului unghiului dat. Cum se găsesc din table valorile cosinusului şi tangentei unghiului dat?
10. Explicaţi cum se găseşte din tablă unghiul dacă este dat sinusul, cosinusul sau tangenta lui.
11. Demonstraţi identităţile: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$;

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}; \qquad 1+\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

12. Demonstraţi că pentru orice unghi ascuţit α:

$$\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha,\ \cos(90°-\alpha)=\sin\alpha.$$

13. Cu ce sînt egale valorile sinusului, cosinusului şi tangentei unghiurilor de 30°, 45°, 60°?
14. Demonstraţi că $\sin\alpha$ şi $\operatorname{tg}\alpha$ cresc la creşterea unghiului ascuţit, iar $\cos\alpha$ descreşte.
15. Demonstraţi „inegalitatea triunghiului".
16. Demonstraţi că în triunghi fiecare latură e mai mică decît suma celorlalte două laturi.

EXERCIŢII

1. Construiţi un unghi, cosinusul căruia este egal cu $\frac{3}{5}$.
2. Construiţi un unghi, cosinusul căruia este egal cu: 1) $\frac{4}{9}$; 2) 0,5; 3) 0,8.
3. Două laturi ale unui triunghi dreptunghic sînt egale cu 3 m şi 4 m. Aflaţi cea de-a treia latură. (Două soluţii.)
4. Aflaţi latura unui romb dacă diagonalele lui sînt egale cu: 1) 6 cm şi 8 cm; 2) 16 dm şi 30 dm; 5) 5 m şi 12 m.
5. Laturile unui dreptunghi sînt egale cu 60 cm şi 91 cm. Cu ce este egală diagonala?
6. Diagonala unui pătrat este egală cu a. Cu ce este egală latura pătratului?

7. Dintr-o tablă de fier cu diametrul de 1,4 m poate oare fi tăiat un pătrat cu latura de 1 m?
8. O catetă a unui triunghi dreptunghic este egală cu 5 m, iar proiecția ei pe ipotenuză — cu 3 m. Aflați ipotenuza și cateta a doua.
9. Aflați catetele unui triunghi dreptunghic dacă proiecțiile lor pe ipotenuză sînt egale cu: 1) 9 cm și 16 cm; 36 m și 64 m.
10. Sînt date segmentele a și b. Cum se construiesc segmentele: 1) $\sqrt{a^2+b^2}$; 2) $\sqrt{a^2-b^2}$, $a>b$.
11. Sînt date segmentele a și b. Cum se construiește segmentul $c=\sqrt{ab}$.
12. Între două clădiri ale uzinei este instalat un uluc înclinat pentru transmiterea materialelor. Distanța dintre clădiri este egală cu 10 m, iar capetele ulucului se află la înălțimea de 8 m și 4 m de la pămînt. Aflați lungimea ulucului.
13. Laturile unui dreptunghi sînt egale cu a și b. Aflați raza circumferinței circumscrise
14. Într-o circumferință este înscris un dreptunghi laturile căruia se raportă ca 8 : 15. Aflați aceste laturi dacă raza circumferinței este de 34 cm.
15. Într-un triunghi isoscel latura laterală este de 17 cm, iar baza — de 16 cm. Aflați înălțimea coborîtă pe bază.
16. Aflați raza circumferinței circumscrise unui triunghi isoscel cu baza a și latura laterală b.
17. Într-un triunghi echilateral cu latura a aflați înălțimea.
18. Într-un trapez isoscel bazele sînt egale cu 10 cm și 24 cm, latura laterală este egală cu 25 cm. Aflați înălțimea trapezului.
19. Într-un trapez isoscel latura laterală este egală cu 41 cm, înălțimea — cu 40 cm, iar linia medie — cu 45 cm. Aflați bazele.
20. Laturile laterale ale unui triunghi sînt de 30 cm și 25 cm, iar înălțimea coborîtă pe bază este de 24 cm. Aflați baza.*
21. Laturile unui triunghi sînt a, b, c. Aflați înălțimea triunghiului coborîtă pe latura c.
22. Laturile laterale ale unui triunghi sînt de 30 cm și 25 cm. Aflați înălțimea triunghiului coborîtă pe baza egală cu: 1) 25 cm; 2) 11 cm.

---

* Uneori într-un triunghi arbitrar care nu este neapărat isoscel latura dusă orizontal se numește bază, iar celelalte două se numesc laturi laterale ca și în problema dată.

23. Aflați înălțimile triunghiului care are laturile de 13 cm, 14 cm și 15 cm.
24. Perimetrul unui triunghi isoscel este egal cu 64 cm, iar latura lui laterală e cu 11 cm mai mare decît baza. Aflați înălțimea coborîtă pe latura laterală.
25. 1) Din punctul B e dusă o oblică la dreapta a. Demonstrați că din punctul B la dreapta a poate fi dusă încă o oblică de aceeași lungime.
2) Dintr-un punct dat pot fi oare duse la o dreaptă trei oblice de lungime egală? Argumentați răspunsul.
26. Un triunghi dreptunghic are o catetă de 8 cm, iar sinusul unghiului opus este egal cu 0,8. Aflați ipotenuza și cateta a doua.
27. Aflați raza circumferinței înscrise într-un triunghi isoscel cu baza a și latura laterală b.
28. Aflați raza circumferinței înscrise r și raza circumferinței circumscrise R pentru un triunghi isoscel cu baza de 10 cm și latura laterală de 13 cm.
29. Într-un triunghi dreptunghic ipotenuza este egală cu a, iar un unghi ascuțit — cu α. Aflați al doilea unghi ascuțit și catetele.
30. Într-un triunghi dreptunghic o catetă este egală cu a, iar unghiul opus ei este α. Aflați al doilea unghi ascuțit, cateta opusă lui și ipotenuza.
31. Într-un triunghi dreptunghic sînt date ipotenuza c și unghiul ascuțit α. Aflați catetele, proiecțiile lor pe ipotenuză și înălțimea coborîtă pe ipotenuză.
32. 1) Folosind tablele, găsiți: sin 22°; sin 22°36′, sin 22°38′, sin 22°41′; cos 68°, cos 68°18′, cos 68°20′, cos 68°23′.
2) Găsiți unghiul x, dacă $\sin x=0{,}2840$; $\sin x=0{,}2844$; $\cos x=0{,}2710$.
33. Găsiți din table valorile sinusului și cosinusului unghiurilor de; 1) 16°; 2) 24°36′; 3) 70°32′; 4) 88°49′.
34. Găsiți din table valoarea unghiului ascuțit x, dacă:
1) $\sin x=0{,}0175$; 2) $\sin x=0{,}5015$; 3) $\cos x=0{,}6814$; 4) $\cos x=0{,}0670$.
35. Găsiți din table valoarea tangentei unghiului de: 1) 10°; 2) 40°40′; 3) 50°30′; 4) 70°15′.
36. Găsiți din table unghiul ascuțit x, dacă: 1) $\operatorname{tg} x=0{,}3227$; 2) $\operatorname{tg} x=0{,}7846$; 3) $\operatorname{tg} x=6{,}152$; 4) $\operatorname{tg} x=9{,}254$.
37. Înălțimea unui triunghi isoscel este egală cu 12,4 m, iar baza — cu 40,6 m. Aflați unghiurile triunghiului și latura laterală.
38. Raportul catetelor unui triunghi dreptunghic este egal cu 19 : 28. Aflați unghiurile lui.

39. Laturile unui dreptunghi sînt egale cu 12,4 şi 26. Aflaţi unghiul dintre diagonale.
40. Diagonalele unui romb sînt egale cu 4,73 şi 2,94. Aflaţi unghiurile lui.
41. Latura unui romb este de 241 m, înălţimea de 120 m. Aflaţi unghiurile.
42. Raza unei circumferinţe este egală cu 5 m. Dintr-un punct, depărtat de centru cu 13 m, sînt duse tangente la circumferinţă. Aflaţi lungimile tangentelor şi unghiul dintre ele.
43. Umbra unui stîlp vertical cu înălţimea de 7 m constituie 4 m. Exprimaţi în grade înălţimea soarelui deasupra orizontului.
44. Baza unui triunghi dreptunghic isoscel este egală cu a. Aflaţi latura laterală.
45. Aflaţi laturile şi unghiurile ascuţite necunoscute ale unui triunghi dreptunghic după următoarele date:
1) după două catete:
a) $a=3$, $b=4$, b) $a=9$, $b=40$;
c) $a=20$, $b=21$; d) $a=11$, $b=60$;
2) după ipotenuză şi o catetă:
a) $c=13$, $a=5$; b) $c=25$, $a=7$;
c) $c=17$, $a=8$; d) $c=85$, $a=84$;
3) după ipotenuză şi un unghi ascuţit:
a) $c=2$, $\alpha=20°$; b) $c=4$, $\alpha=50°20'$;
c) $c=8$, $\alpha=70°36'$; d) $c=16$, $\alpha=76°21'$;
4) după o catetă şi unghiul opus:
a) $a=3$, $\alpha=30°27'$; b) $a=5$, $\alpha=40°48'$;
c) $a=7$, $\alpha=60°35'$; d) $a=9$, $\alpha=68°$.
46. Aduceţi la forma cea mai simplă expresiile:
1) $1-\sin^2\alpha$; 2) $(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)$; 3) $1+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$;
4) $\sin\alpha-\sin\alpha\cos^2\alpha$; 5) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;
6) $\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha\operatorname{tg}^2\alpha$; 7) $\cos^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha\cos^2\alpha$;
8) $\operatorname{tg}^2\alpha(2\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-1)$; 9) $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^4\alpha}{\cos^2\alpha}$.
47. Calculaţi valorile $\sin\alpha$ şi $\operatorname{tg}\alpha$, dacă:
c) $\cos\alpha=\dfrac{5}{13}$; 2) $\cos\alpha=\dfrac{15}{17}$; 3) $\cos\alpha=0{,}6$.
48. Aflaţi $\cos\alpha$ şi $\operatorname{tg}\alpha$, dacă:
1) $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$; 2) $\sin\alpha=\dfrac{40}{41}$; 3) $\sin\alpha=0{,}8$.
49. Construiţi unghiul α, dacă se ştie că: 1) $\cos\alpha=\dfrac{4}{7}$;

2) $\sin\alpha=\dfrac{4}{7}$; 3) $\sin\alpha=0{,}5$; 4) $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{3}{5}$; 5) $\operatorname{tg}\alpha=0{,}7$.
50. Într-un triunghi dreptunghic cu ipotenuza a şi unghiul de 60° aflaţi cateta opusă acestui unghi.
51. Aflaţi raza r a circumferinţei înscrise într-un triunghi echilateral cu latura a şi raza R a circumferinţei circumscrise acestui triunghi.
52. Într-un triunghi unghiul mai mare de la bază este egal cu 45°, iar înălţimea împarte baza în părţi de 20 cm şi 21 cm. Aflaţi latura laterală mai mare.
53. Într-un triunghi una din laturi este egală cu 1 m, iar unghiurile alăturate ei sînt egale cu 30° şi 45°. Aflaţi celelalte laturi ale triunghiului.
54. Diagonala unui dreptunghi e de două ori mai mare decît una din laturile lui. Aflaţi unghiurile dintre diagonale.
55. Diagonalele unui romb sînt egale cu a şi $a\sqrt{3}$. Aflaţi unghiurile rombului.
56. Care unghi este mai mare: α sau β, dacă:
1) $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$, $\sin\beta=\dfrac{1}{4}$; 2) $\sin\alpha=\dfrac{2}{3}$, $\sin\beta=\dfrac{3}{4}$;
3) $\cos\alpha=\dfrac{3}{7}$, $\cos\beta=\dfrac{2}{5}$; 4) $\cos\alpha=0{,}75$, $\cos\beta=0{,}74$;
5) $\operatorname{tg}\alpha=2{,}1$, $\operatorname{tg}\beta=2{,}5$; 6) $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{8}{3}$, $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{5}{2}$?
57. În triunghiul dreptunghic ABC unghiul A e mai mare decît unghiul B. Care catetă e mai mare: AC sau BC?
58. În triunghiul dreptunghic ABC cateta BC e mai mare decît cateta AC. Care unghi e mai mare: A sau B?
59. Un triunghi isoscel are laturile egale cu 3 m şi 7 m. Care din ele este bază?
60. Demonstraţi că distanţa dintre oricare două puncte luate pe laturile unui triunghi nu e mai mare decît cea mai mare din laturile lui.
61. Demonstraţi că punctele A, B, C aparţin unei drepte, dacă:
1) $AB=5$ m, $BC=7$ m, $AC=12$ m; 2) $AB=10{,}7$, $BC=17{,}1$, $AC=6{,}4$.
62. Într-un paralelogram cu laturile de 4 cm şi 7 cm poate fi oare o diagonală egală cu 2 cm?
63. Într-un triunghi o latură este egală cu 1,9 m, iar alta — cu 0,7 m. Aflaţi latura a treia, ştiind că lungimea ei este egală cu un număr întreg de metri.

64. Demonstrați că mediana triunghiului ABC dusă din vîrful A e mai mică decît semisuma laturilor AB și AC.

65. Demonstrați că suma înălțimilor unui triunghi e mai mică decît perimetrul lui.

66. Se știe că diagonalele unui patrulater se intersectează. Demonstrați că suma lungimilor lor e mai mică decît perimetrul, însă e mai mare decît semiperimetrul patrulaterului.

67. Sînt date patru puncte: A, B, C, D. Se știe că segmentele AB și CD se intersectează. Aflați un punct suma distanțelor de la care pînă la punctele A, B, C, D este cea mai mică.

68. Laturile unui triunghi pot fi oare proporționale cu numerele 1, 2, 3?

69. Demonstrați că într-un triunghi fiecare latură e mai mică decît semiperimetrul.

70. Demonstrați că orice coardă a circumferinței nu e mai mare decît diametrul și este egală cu diametrul numai atunci, cînd ea însăși este diametru.

71. În interiorul unei circumferințe de rază R e luat un punct la distanța d de la centru. Aflați cea mai mare și cea mai mică distanță de la acest punct la punctele circumferinței.

72. În afara unei circumferințe de rază R e luat un punct la distanța d de la centru. Aflați cea mai mare și cea mai mică distanță de la acest punct la punctele circumferinței.

73. Pot oare să se intersecteze circumferințele centrele cărora se află la distanța de 20 cm, iar razele sînt de 8 cm și 11 cm? Argumentați răspunsul.

74. Pot oare să se intersecteze circumferințele, centrele cărora se află la distanța de 5 cm, iar razele sînt de 6 cm și 12 cm? Argumentați răspunsul.

75. Demonstrați că în problema 73 circumferințele sînt situate una în afara celeilalte, iar în problema 74 circumferința cu raza de 6 cm e situată în interiorul circumferinței cu raza de 12 cm.

76. Pot oare să se intersecteze circumferințele cu razele R_1 și R_2 și cu distanța dintre centre d, dacă $R_1+R_2<d$?

§ 8. COORDONATE CARTEZIENE PE PLAN

47. INTRODUCEREA COORDONATELOR PE PLAN

Prin punctul O ducem pe plan două drepte perpendiculare x și y — *axele de coordonate* (fig. 124). Axa x (de obicei orizontală) se numește *axa absciselor*, iar axa y — *axa ordonatelor*. Punctul de intersecție O — *originea coordonatelor* — împarte fiecare axă în două semiaxe. Convenim să numim una din ele *semiaxă pozitivă*, notînd-o printr-o săgeată, iar pe cealaltă — *semiaxă negativă*.

Fiecărui punct A al planului îi punem în corespondență o pereche de numere — *cooronatele punctului* — abscisa (x) și ordonata (y) în conformitate cu următoarea regulă.

Prin punctul A ducem o dreaptă paralelă cu axa ordonatelor (fig. 125). Ea intersectează axa absciselor x într-un oarecare A_x. *Abscisă* a punctului A vom numi numărul x valoarea absolută a căruia este egală cu distanța de la punctul O la A_x. Acest număr este pozitiv dacă A_x aparține semiaxei pozitive, negativ dacă A_x aparține semiaxei negative. Dacă punctul A aparține axei ordonatelor y, considerăm că x este egal cu zero.

Ordonata (y) a punctului A se definește în mod analog. Prin punctul A ducem o dreaptă paralelă cu axa absciselor x (vezi fig. 125). Ea intersectează axa ordonatelor y într-un punct oarecare A_y. *Ordonată* a punctului A vom numi numărul y, valoarea absolută a căruia este egală cu distanța de la punctul O la A_y. Acest număr este pozitiv, dacă A_y aparține semiaxei pozitive, negativ, dacă A_y aparține semiaxei negative. Dacă punctul A aparține axei absciselor x, considerăm că y este egal cu zero.

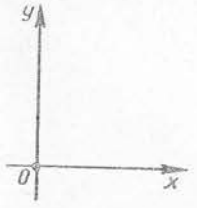


Fig. 124

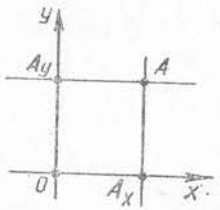


Fig. 125

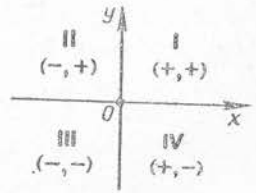


Fig. 126

Coordonatele unui punct se scriu în paranteze alături de notaţia literală a punctului, de exemplu: $A(x, y)$ (pe primul loc — abscisa, pe al doilea — ordonata).

Axele de coordonate împart planul în patru părţi — cadrane — I, II, III, IV (fig. 126). În limitele unui cadran semnele ambelor coordonate se păstrează şi au valorile indicate în figură.

Punctele axei x (axei absciselor) au ordonatele egale cu zero ($y=0$), iar punctele axei y (axei ordonatelor) au abscisele egale cu zero ($x=0$). Originea coordonatelor are abscisa şi ordonata egale cu zero.

Planul pe care sînt introduse coordonatele x şi y în modul descris mai sus se numeşte plan xy. Un punct arbitrar pe acest plan cu coordonatele x şi y uneori va fi notat simplu (x, y).

Coordonatele x, y introduse pe plan se numesc *coordonate carteziene* după numele savantului francez R. Decartes (1596—1650) care pentru prima dată le-a folosit în cercetările sale.

P r o b l e m ă (9). Sînt date punctele $A(-3, 2)$ şi $B(4, 1)$. Demonstraţi că segmentul AB intersectează axa y, dar nu intersectează axa x.

R e z o l v a r e. Axa y împarte planul xy în două semiplane. Într-un semiplan abscisele punctelor sînt pozitive, iar în celălalt — negative. Deoarece abscisele punctelor A şi B au semne opuse punctele A şi B sînt situate în semiplane diferite. Aceasta înseamnă că segmentul AB intersectează axa y.

Axa x, de asemenea împarte planul xy în două semiplane. Într-un semiplan ordonatele punctelor sînt pozitive, iar în celălalt — negative. Ordonatele punctelor A şi B au acelaşi semn (sînt pozitive). Deci punctele A şi B se află în acelaşi semiplan. Prin urmare, segmentul AB nu se intersectează cu axa x.

48. COORDONATELE MIJLOCULUI UNUI SEGMENT

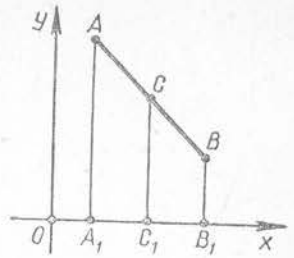


Fig. 127

Fie $A(x_1, y_1)$ şi $B(x_2, y_2)$ două puncte arbitrare şi $C(x, y)$ mijlocul segmentului AB. Să aflăm coordonatele x şi y ale punctului C. Să considerăm la început cazul cînd segmentul AB nu e paralel cu axa y, adică $x_1 \neq x_2$. Prin punctele A, B, C ducem drepte paralele cu axa y (fig. 127). Ele intersectează axa x în punctele $A_1(x_1, 0)$, $B_1(x_2, 0)$, $C_1(x, 0)$. Conform teoremei lui Tales punctul C_1 este mijlocul segmentului A_1B_1.

Deoarece punctul C_1 este mijlocul segmentului A_1B_1, avem $A_1C_1 = B_1C_1$ şi deci $|x-x_1| = |x-x_2|$. De aici rezultă că sau $x-x_1 = x-x_2$ sau $x-x_1 = -(x-x_2)$. Prima egalitate e imposibilă, deoarece $x_1 \neq x_2$. De aceea e adevărată egalitatea a doua. Dar din ea se obţine formula

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Dacă $x_1 = x_2$, adică segmentul AB este paralel cu axa y, toate cele trei puncte A_1, B_1, C_1 au una şi aceeaşi abscisă. Deci formula rămîne adevărată şi în acest caz.

Ordonata punctului C se află în mod analog. Prin punctele A, B, C se duc drepte paralele cu axa x. Se obţine formula

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

P r o b l e m ă (17). Sînt date trei vîrfuri ale paralelogramului $ABCD$: $A(1, 0)$, $B(2, 3)$, $C(3, 2)$. Aflaţi coordonatele celui de-al patrulea vîrf D şi coordonatele punctului de intersecţie a diagonalelor.

R e z o l v a r e. Punctul de intersecţie a diagonalelor este mijlocul fiecăreia din ele. De aceea el este mijlocul segmentului AC şi deci are coordonatele

$$x = \frac{1+3}{2} = 2, \qquad y = \frac{0+2}{2} = 1.$$

Acum știind coordonatele punctului de intersecție a diagonalelor, aflăm coordonatele x, y ale vîrfului al patrulea D. Folosind faptul că punctul de intersecție a diagonalelor este mijlocul segmentului BD avem

$$\frac{2+x}{2}=2, \quad \frac{3+y}{2}=1.$$

De aici $x=2$, $y=-1$.

49. DISTANȚA DINTRE PUNCTE

Fie date pe planul xy două puncte: A_1 cu coordonatele x_1, y_1 și A_2 cu coordonatele x_2, y_2. *Să exprimăm distanța dintre punctele A_1 și A_2 prin coordonatele acestor puncte.*

Să considerăm la început cazul cînd $x_1 \neq x_2$ și $y_1 \neq y_2$. Prin punctele A_1 și A_2 ducem drepte paralele cu axele de coordonate și notăm prin A punctul lor de intersecție (fig. 128). Distanța dintre punctele A și A_1 este egală cu $|y_1-y_2|$, iar distanța dintre punctele A și A_2 este egală cu $|x_1-x_2|$. Aplicînd triunghiului dreptunghic AA_1A_2 teorema lui Pitagora, obținem:

$$d^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2, \qquad (*)$$

d fiind distanța dintre punctele A_1 și A_2.

Deși formula (*) pentru distanța dintre puncte a fost dedusă de noi presupunînd că $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$, ea rămîne adevărată și în celelalte cazuri. Într-adevăr, dacă $x_1=x_2$, $y_1 \neq y_2$, atunci d este egal cu $|y_1-y_2|$. Același rezultat se obține și din formula (*). În mod analog se consideră cazul cînd $x_1 \neq x_2$, $y_1=y_2$. Dacă $x_1=x_2$, $y_1=y_2$ punctele A_1 și A_2 coincid și din formula (*) obținem $d=0$.

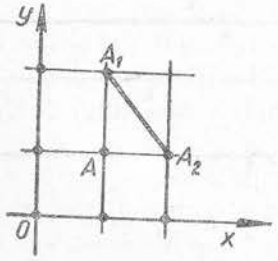


Fig. 128

Problemă (27). Găsiți pe axa x un punct egal depărtat de punctele (1, 2) și (2, 3).

Rezolvare. Fie $(x, 0)$ punctul căutat. Egalînd distanțele de la el pînă la punctele date, obținem:

$(x-1)^2+(0-2)^2=(x-2)^2+(0-3)^2$

De aici găsim: $x=4$. Deci, punctul căutat este (4, 0).

50. ECUAȚIA CIRCUMFERINȚEI

Se numește *ecuație a unei figuri* pe plan în coordonate carteziene o ecuație cu două variabile x și y care este satisfăcută de coordonatele oricărui punct al figurii. Și reciproc, oricare două numere care satisfac această ecuație sînt coordonatele unui punct oarecare al figurii.

Să compunem ecuația circumferinței cu centrul în punctul $A_0(a, b)$ și raza R (fig. 129). Luăm un punct arbitrar $A(x, y)$ pe circumferință. Distanța de la el pînă la centrul A_0 este egală cu R. Pătratul distanței de la punctul A la A_0 este egal cu $(x-a)^2+(y-b)^2$. Prin urmare, coordonatele x, y ale fiecărui punct A al circumferinței satisfac ecuația

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \qquad (*)$$

Reciproc: orice punct A coordonatele căruia satisfac ecuația (*) aparține circumferinței, deoarece distanța de la el pînă la punctul A_0 este egală cu R. De aici rezultă că ecuația (*) într-adevăr este ecuația circumferinței cu centrul A_0 și raza R.

Menționăm că dacă centru al circumferinței este originea coordonatelor, ecuația circumferinței are forma:

$$x^2+y^2=R^2.$$

Problemă (33). Care este condiția pentru ca circumferințele cu razele a și b și distanța dintre centre c să se intersecteze?

Rezolvare. Fie O și O_1 centrele circumferințelor. Considerăm punctul O drept originea sistemului cartezian de coordonate, iar semidreapta OO_1 — drept semiaxă pozitivă x. Ecuațiile circumferințelor sînt:

$$x^2+y^2=a^2, \quad (x-c)^2+y^2=b^2. \qquad (**)$$

Dacă circumferințele se intersectează, coordonatele x, y ale punctului de intersecție satisfac ambele ecuații (**). Și reciproc, dacă sistemul de ecuații (**) are soluție, adică există x și y care

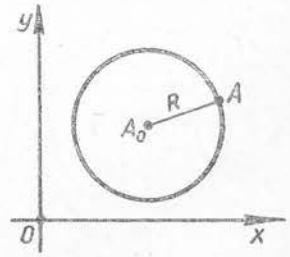


Fig. 129

satisfac ambele ecuaţii aceste numere sînt coordonatele punctului de intersecţie a circumferinţelor. Numărul punctelor de intersecţie dacă circumferinţele se intersectează este egal cu numărul soluţiilor sistemului.

Să rezolvăm sistemul de ecuaţii (**). Pentru aceasta mai întîi scădem ecuaţiile parte cu parte. Obţinem: $2cx-c^2=$ $=a^2-b^2$. De aici $x=\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}$. Substituind această valoare a lui x în prima ecuaţie, obţinem:

$$\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right)^2+y^2=a^2.$$

De aici

$$y^2=a^2-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right)^2.$$

Scriem partea dreaptă a egalităţii ca diferenţa pătratelor. Obţinem:

$$\left(a+\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right)\left(a-\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right)=$$

$$=\frac{1}{4c^2}(2ac+a^2+c^2-b^2)(2ac-a^2-c^2+b^2)=$$

$$=\frac{1}{4c^2}\left[(a+c)^2-b^2\right]\left[b^2-(a-c)^2\right]=$$

$$=\frac{1}{4c^2}(a+b+c)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c).$$

Aşadar,

$$y^2=\frac{1}{4c^2}(a+b+c)(a+c-b)(a+b-c)(b+c-a).$$

De aici se vede că dacă $a+c>b$, $a+b>c$ şi $b+c>a$ partea

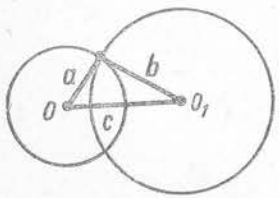
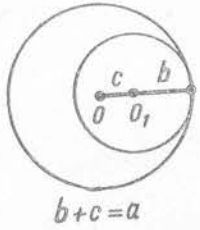


Fig. 130



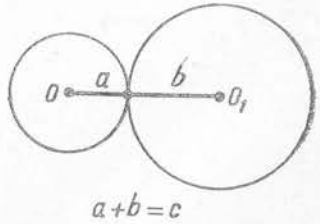
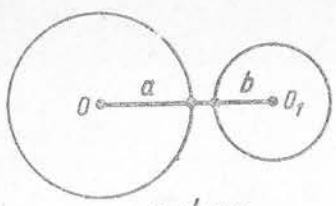


Fig. 131



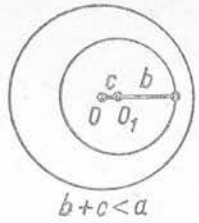


Fig. 132

dreaptă a egalităţii e pozitivă şi, prin urmare, sistemul (**) are soluţii. Şi soluţii de acestea vor fi două. Circumferinţele se intersectează respectiv în două puncte (fig. 130).

Dacă cel puţin unul din factorii $a+c-b$, $a+b-c$, $b+$ $+c-a$ este egal cu zero sistemul (**) are o singură soluţie. Circumferinţele sînt tangente (fig. 131).

Dacă unul din factorii din partea dreaptă este negativ sistemul (**) nu are soluţii şi circumferinţele nu se intersectează (fig. 132). Doi factori nu pot fi negativi, deoarece suma lor ar fi negativă. Iar ea este vădit pozitivă. De exemplu, dacă $a+c-b<0$ şi $a+b-c<0$ suma lor este $(a+c-b)(a+b-c)=2a<0$. Aceasta însă e imposibil. La fel va fi şi în celelalte cazuri.

Aşadar, ***dacă unul din numerele a, b, c este mai mare decît suma celorlalte două, circumferinţele nu se intersectează; dacă unul din aceste numere este egal cu suma celorlalte două, circumferinţele sînt tangente; dacă fiecare din aceste numere este mai mic decît suma celorlalte două, circumferinţele se intersectează în două puncte.***

51. ECUAŢIA DREPTEI

Să demonstrăm că ***orice dreaptă în coordonate carteziene x, y are o ecuaţie de forma***

$$ax+by+c=0. \qquad (*)$$

Fie h o dreaptă arbitrară pe planul xy. Ducem o dreaptă oarecare perpendiculară pe dreapta h şi depunem pe ea de la punctul de intesecţie C cu dreapta h segmentele egale CA_1 şi CA_2 (fig. 133).

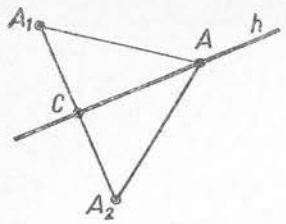


Fig. 133

Fie a_1, b_1 coordonatele punctului A_1 şi a_2, b_2 coordonatele punctului A_2. După cum ştim orice punct $A(x, y)$ al dreptei h este egal depărtat de punctele A_1 şi A_2. De aceea coordonatele lui satisfac ecuaţia

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=$$
$$=(x-a_2)^2+(y-b_2)^2. \quad (**)$$

Reciproc, dacă coordonatele x şi y ale unui punct oarecare satisfac ecuaţia (**), acest punct este egal depărtat de punctele A_1 şi A_2 şi deci aparţine dreptei h. Prin urmare, ecuaţia (**) este ecuaţia dreptei h. Dacă în această ecuaţie deschidem parantezele şi trecem toţi termenii ecuaţiei în partea ei stîngă ea ia forma (*):

$$2(a_2-a_1)x+2(b_2-b_1)y+(a_1^2+b_1^2-a_2^2-b_2^2)=0.$$

Afirmaţia e demonstrată.

Problemă (47). Compuneţi ecuaţia dreptei care trece prin punctele $A(-1, 1)$, $B(1, 0)$.

Rezolvare. După cum ştim ecuaţia dreptei are forma $ax+by+c=0$. Punctele A şi B aparţin dreptei şi deci coordonatele lor satisfac această ecuaţie. Substituind coordonatele punctelor A şi B în ecuaţia dreptei, obţinem:

$$-a+b+c=0,\ a+c=0.$$

Din aceste ecuaţii putem exprima doi coeficienţi, de exemplu, a şi b prin al treilea: $a=-c$, $b=-2c$. Substituind aceste valori ale lui a şi b în ecuaţia dreptei, obţinem:

$$-cx-2cy+c=0.$$

Prin c putem simplifica. Atunci obţinem:

$$-x-2y+1=0.$$

Aceasta este ecuaţia dreptei noastre.

52. AMPLASAREA UNEI DREPTE ÎN RAPORT CU UN SISTEM DE COORDONATE

Să clarificăm cum e amplasată o dreaptă în raport cu axele de coordonate, dacă ecuaţia ei $ax+by+c=0$ are o anumită formă particulară.

1. $a=0$, $b\neq 0$. În acest caz ecuaţia dreptei poate fi scrisă astfel:

$$y=-\frac{c}{b}.$$

Aşadar, toate punctele dreptei au una şi aceeaşi ordonată $(-\frac{c}{b})$, prin urmare, ***dreapta este paralelă cu axa x*** (fig. 134, *a*). În particular, dacă şi $c=0$ dreapta coincide cu axa x.

2. $b=0$, $a\neq 0$. Acest caz se consideră în mod analog. ***Dreapta este paralelă cu axa y*** (fig. 134, *b*) şi coincide cu ea dacă şi $c=0$.

3. $c=0$. ***Dreapta trece prin originea coordonatelor***, deoarece coordonatele ei (0, 0) satisfac ecuaţia dreptei (fig. 134, *c*).

Dacă în ecuaţia generală a dreptei $ax+by+c=0$ coeficientul lui y este diferit de zero această ecuaţie poate fi rezolvată în raport cu y. Obţinem:

$$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}.$$

Sau notînd $-\frac{a}{b}=k$, $-\frac{c}{b}=q$, avem:

$$y=kx+b.$$

Să clarificăm *sensul geometric al coeficientului k în această*

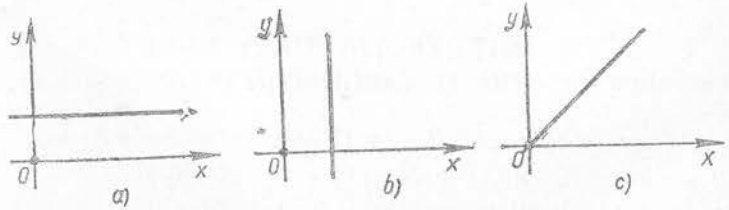


Fig. 134

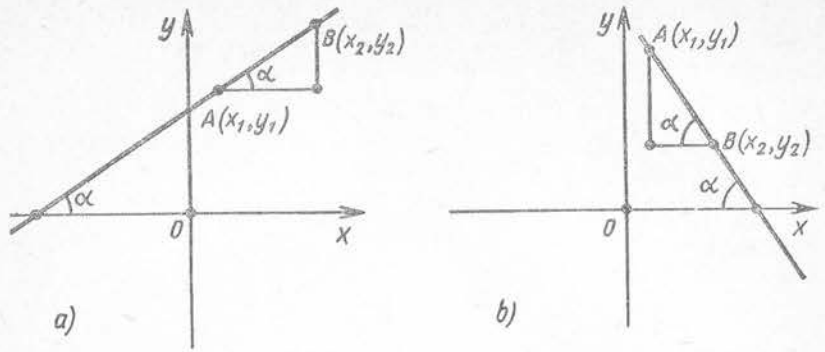


Fig. 135

ecuație. Luăm două puncte pe dreaptă $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ $(x_1<x_2)$. Coordonatele lor satisfac ecuația dreptei:

$$y_1=kx_1+q,\ y_2=kx_2+q.$$

Scăzînd aceste egalități parte cu parte, obținem $y_2-y_1=k(x_2-x_1)$. De aici

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

În cazul reprezentat în figura 135, *a*, $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\operatorname{tg}\alpha$.

În cazul reprezentat în figura 135, *b*, $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\operatorname{tg}\alpha$.

Așadar, coeficientul k în ecuația dreptei cu precizie de un semn este egal cu tangenta unghiului ascuțit format de dreaptă cu axa x.

Coeficientul k în ecuația dreptei se numește *coeficient unghiular al dreptei.*

53. INTERSECȚIA UNEI DREPTE CU O CIRCUMFERINȚĂ

Să examinăm chestiunea despre intersecția unei drepte cu o circumferință. Fie R raza circumferinței și d distanța de la centrul circumferinței pînă la dreaptă. Considerăm

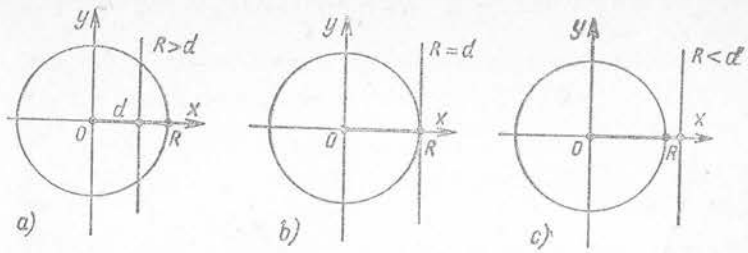


Fig. 136

centrul circumferinței drept originea coordonatelor, iar o dreaptă perpendiculară pe dreapta dată — drept axa x (fig. 136). Atunci ecuația circumferinței este $x^2+y^2=R^2$, iar ecuația dreptei $x=d$. Pentru ca dreapta și circumferința să se intersecteze, e necesar ca sistemul de două ecuații

$$x^2+y^2=R^2,\ x=d$$

să aibă soluție. Și reciproc, orice soluție a acestui sistem ne dă coordonatele x, y ale unui punct de intersecție a dreptei cu circumferința. Rezolvînd sistemul nostru obținem:

$$x=d,\ y=\pm\sqrt{R^2-d^2}.$$

Din expresia pentru y este evident că sistemul are două soluții, adică circumferința și dreapta au două puncte de intersecție, dacă $R>d$ (fig. 136, *a*). Sistemul are o singură soluție — *dreapta și circumferința sînt tangente* (fig. 136, *b*), dacă $R=d$. Sistemul nu are soluții, adică *dreapta și circumferința nu se intersectează, dacă* $R<d$ (fig. 136, *c*).

54. DEFINIȚIA SINUSULUI, COSINUSULUI ȘI TANGENTEI PENTRU ORICE UNGHI DE LA 0° LA 180°

Pînă acum valorile sinusului, cosinusului și tangentei au fost definite numai pentru unghiuri ascuțite. Acum noi le vom defini pentru orice unghi de la 0° la 180°. Luăm pe planul xy o circumferință de rază R cu centrul în originea coordonatelor (fig. 137). Depunem de la semiaxa poziti-

vă x unghiul α în semiplanul de sus (semiplanul unde $y>0$).

Fie x şi y coordonatele punctului A. Valorile $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ şi $\operatorname{tg}\alpha$ pentru unghiul ascuţit α se exprimă prin coordonatele punctului A şi anume:

$$\cos\alpha=\frac{x}{R},\qquad \sin\alpha=\frac{y}{R},\qquad \operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}.$$

Definim acum valorile $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ şi $\operatorname{tg}\alpha$ prin aceste formule *pentru orice unghi* α. (Pentru $\operatorname{tg}\alpha$ unghiul $\alpha=90°$ se exclude.) Din această definiţie rezultă că $\sin 90°=1$, $\cos 90°=0$, $\sin 180°=0$, $\cos 180°=-1$, $\operatorname{tg} 180°=0$. Considerînd că semidreptele care coincid formează un unghi de 0° vom avea: $\sin 0°=0$, $\cos 0°=1$, $\operatorname{tg} 0°=0$.

Teorema 8.1. ***Pentru orice unghi*** α, $0°<\alpha<180°$, $\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$, $\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha$. ***Pentru unghiul*** $\alpha\neq 90°$ ***avem*** $\operatorname{tg}(180°-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$.

Demonstraţie. Triunghiurile OAB şi OA_1B_1 sînt egale după ipotenuză şi un unghi ascuţit (fig. 138). Din egalitatea triunghiurilor rezultă că $AB=A_1B_1$, adică $y=y_1$; $OB=OB_1$, prin urmare $x=-x_1$. De aceea

$$\sin(180°-\alpha)=\frac{y_1}{R}=\frac{y}{R}=\sin\alpha,$$

$$\cos(180°-\alpha)=\frac{x_1}{R}=\frac{-x}{R}=-\cos\alpha.$$

Împărţind parte cu parte egalitatea $\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$ la egalitatea $\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha$ obţinem: $\operatorname{tg}(180°-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$. Teorema e demonstrată.

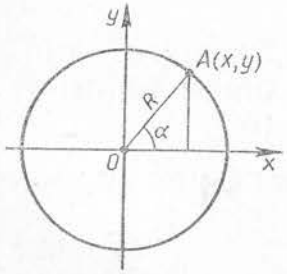


Fig. 137

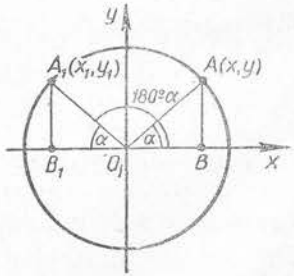


Fig. 138

ÎNTREBĂRI PENTRU REPETARE

1. Explicaţi cum se definesc coordonatele unui punct.
2. Ce semne au coordonatele unui punct dacă el aparţine cadranului întîi (al doilea, al treilea, al patrulea)?
3. Cu ce sînt egale abscisele punctelor situate pe axa ordonatelor? Cu ce sînt egale ordonatele punctelor situate pe axa absciselor? Cu ce sînt egale coordonatele originii coordonatelor?
4. Deduceţi formulele pentru coordonatele mijlocului unui segment.
5. Deduceţi formula pentru distanţa dintre puncte.
6. Ce este ecuaţia unei figuri în coordonate carteziene?
7. Deduceţi ecuaţia circumferinţei.
8. Demonstraţi că ecuaţia unei drepte în coordonate carteziene are forma $ax+by+c=0$.
9. Cum e amplasată o dreaptă dacă în ecuaţia ei $ax+by+c=0$ coeficientul $a=0$ (coeficientul $b=0$, coeficientul $c=0$)?
10. Ce sens geometric are coeficientul k în ecuaţia dreptei $y+kx+b$?
11. Care este condiţia pentru ca o dreaptă şi o circumferinţă să nu se intersecteze, să se intersecteze în două puncte, să fie tangente?
12. Daţi definiţia sinusului, cosinusului şi tangentei pentru orice unghi de la 0° la 180°.
13. Demonstraţi că pentru orice unghi α, $0°<\alpha<180°$, $\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$, $\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha$, $\operatorname{tg}(180°-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$.

EXERCIŢII

1. Duceţi axele de coordonate, alegeţi o unitate de lungime pe axe, construiţi punctele cu coordonatele: (1, 2), (−2, 1), (−1, −3), (2, −1).
2. Luaţi la întîmplare patru puncte pe planul xy. Aflaţi coordonatele acestor puncte.
3. Pe o dreaptă paralelă cu axa x sînt luate două puncte. Ordonata unuia din ele este $y=2$. Cu ce este egală ordonata celuilalt punct?
4. Pe o dreaptă perpendiculară pe axa x sînt luate două puncte. Abscisa unuia din ele este $x=3$. Cu ce este egală abscisa celuilalt punct?
5. Din punctul $A(2, 3)$ e coborîtă perpendiculara pe axa x. Aflaţi coordonatele piciorului perpendicularei.
6. Prin punctul $A(2, 3)$ e dusă o dreaptă paralelă cu axa x.

Aflați coordonatele punctului ei de intersecție cu axa y.

7. Aflați locul geometric al punctelor planului xy pentru care abscisa $x=3$.
8. Aflați locul geometric al punctelor planului xy pentru care $|x|=3$.
9. Sînt date punctele $A(-3, 2)$ și $B(4, 1)$. Demonstrați că segmentul AB intersectează axa y și nu intersectează axa x.
10. Pe care din semiaxele axei y (pozitivă sau negativă) o intersectează segmentul AB în problema precedentă?
11. Aflați distanța de la punctul $(-3, 4)$ la: 1) axa x; 2) axa y.
12. Aflați distanța de la punctul $(-3, 4)$ la originea coordonatelor.
13. Pe bisectoarea cadranului întîi e luat punctul cu ordonata $y=2$. Cu ce este egală abscisa acestui punct?
14. Rezolvați problema precedentă dacă punctul se află pe bisectoarea cadranului al doilea.
15. Aflați locul geometric al punctelor planului xy pentru care $x=y$.
16. Aflați locul geometric al punctelor planului xy pentru care $x=-y$.
17. Sînt date trei vîrfuri ale paralelogramului $ABCD$: $A(1, 0)$, $B(2, 3)$, $C(3, 2)$. Aflați coordonatele celui de-al patrulea vîrf D și ale punctului de intersecție a diagonalelor.
18. Demonstrați că patrulaterul $ABCD$ cu vîrfurile în punctele $A(-1, -2)$, $B(2, -5)$, $C(1, -2)$, $D(-2, 1)$ este paralelogram. Aflați punctul de intersecție a diagonalelor lui.
19. Aflați coordonatele mijlocului segmentului cu extremitățile $(2, 0)$ și $(0, 2)$.
20. Sînt date o extremitate $(1, 1)$ a unui segment și mijlocul lui $(2, 2)$. Aflați a doua extremitate a segmentului.
21. Demonstrați că patrulaterul $ABCD$ cu vîrfurile în punctele $A(4, 1)$, $B(0, 4)$, $C(-3, 0)$, $D(1, -3)$ este un pătrat.
22. Demonstrați că punctele $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$ sînt vîrfuri ale unui pătrat.
23. Aflați distanța dintre punctele: 1) $(1, 0)$ și $(3, 0)$; 2) $(1, 0)$ și $(3, 0)$.
24. Demonstrați că distanța dintre punctele $(x_1, 0)$ și $(x_2, 0)$ ale axei x pentru orice x_1 și x_2 se determină după formula $d=|x_2-x_1|$.
25. Sînt date trei puncte: $A(4, -2)$; $B(1, 2)$, $C(-2, 6)$. Aflați distanțele dintre aceste puncte luate cîte două.

26. Demonstrați că punctele A, B, C din problema 25 se află pe o dreaptă. Care din ele e situat între celelalte două?
27. Găsiți pe axa x un punct egal depărtat de punctele $(1, 2)$ și $(2, 3)$.
28. Găsiți un punct egal depărtat de axele de coordonate și de punctul $(3, 6)$.
29. Care din punctele $(1, 2)$, $(3, 4)$, $(-4, 3)$, $(0, 5)$, $(5, -1)$ aparțin circumferinței determinate de ecuația $x^2+y^2=25$?
30. Găsiți pe circumferința determinată de ecuația $x^2+y^2=169$ punctele: 1) cu abscisa 5; 2) cu ordonata -12.
31. Sînt date punctele $A(2, 0)$ și $B(-2, 6)$. Compuneți ecuația circumferinței un diametru al căreia este segmentul AB.
32. Sînt date punctele $A(-1, -1)$ și $C(-4, 3)$. Compuneți ecuația circumferinței cu centrul în punctul C care trece prin punctul A.
33. Care este condiția pentru ca circumferințele cu razele a și b și distanța dintre centre c să se intersecteze?
34. Demonstrați că dacă fiecare din numerele pozitive a, b, c e mai mic decît suma celorlalte două există un triunghi cu laturile a, b, c.
35. Poate fi oare construit un triunghi cu laturile:
1) $a=1$ cm, $b=2$ cm, $c=3$ cm; 2) $a=2$ cm; $b=3$ cm, $c=4$ cm; 3) $a=3$ cm, $b=7$ cm, $c=11$ cm; 4) $a=4$ cm, $b=9$ cm, $c=5$ cm.
36. Găsiți centrul unei circumferințe pe axa x dacă se știe că ea trece prin punctul $(1, 4)$ și raza ei este egală cu 5.
37. Aflați coordonatele punctelor de intersecție a circumferinței $x^2+y^2-8x-8y+7=0$ cu axa x.
38. Aflați coordonatele punctelor de intersecție a două circumferințe:

$$x^2+y^2+8x-8y-8=0,$$
$$x^2+y^2-8x+8y-8=0.$$

39. Compuneți ecuația circumferinței cu centrul în punctul $(1, 2)$ tangente la axa x.
40. Compuneți ecuația circumferinței cu centrul $(-3, 4)$ care trece prin originea coordonatelor.
41. Demonstrați că circumferința $x^2+y^2+2ax+1=0$ nu se intersectează cu axa y.
42. Demonstrați că circumferința $x^2+y^2+2ax=0$ este tangentă la axa y.

43. Compuneți ecuația locului geometric al punctelor egal depărtate de două puncte date (0, 1) și (1, 2)
44. Găsiți punctele de intersecție ale axelor de coordonate cu dreapta dată prin ecuația: 1) $x+2y+3=0$; 2) $3x+4y=12$; 3) $3x-2y+6=0$; 4) $4x-2y-10=0$.
45. Pe dreapta dată prin ecuația $3x+4y=1$ găsiți punctul cu abscisa $x=-1$; punctul cu ordonata $y=-2$.
46. Găsiți punctul de intersecție a dreptelor date prin ecuațiile:
    1) $x+2y+3=0$, $4x+5y+6=0$;
    2) $3x-y-2=0$, $2x+y-8=0$;
    3) $4x+5y+8=0$, $4x-2y-6=0$.
47. Compuneți ecuația dreptei care trece prin punctele $A(-1, 1)$, $B(1, 0)$.
48. Compuneți ecuația dreptei care trece prin două puncte cu coordonatele: 1) (2, 3) și (3, 2); 2) (4, —1) și (—6, 2); 3) (5, —3) și (—1, —2).
49. Cu ce sînt egali coeficienții a și b în ecuația dreptei $ax+by=1$, dacă se știe că ea trece prin punctele (1, 2) și (2, 1)?
50. Cu ce este egal coeficientul c în ecuația dreptei $x+y+c=0$, dacă ea trece prin punctul (1, 2)?
51. Pentru ce valoare a lui c dreapta $x+y+c=0$ este tangentă la circumferința $x^2+y^2=1$?
52. Demonstrați că trei drepte $x+2y=3$, $2x-y=1$ și $3x+y=4$ se intersectează într-un punct.
53. Demonstrați că dreptele $x+2y=3$ și $2x+4y=3$ nu se intersectează.
54. Compuneți ecuația dreptei știind că ea este paralelă cu axa x și trece prin punctul (2, 3).
55. Compuneți ecuația dreptei știind că ea trece prin originea coordonatelor și punctul (2, 3)
56. Găsiți sinusul, cosinusul și tangenta unghiurilor de 120°, 135°, 150°.
57. Folosind tablele, găsiți: 1) $\sin 160°$; 2) $\cos 140°$; 3) $\operatorname{tg} 130°$
58. Folosind tablele, găsiți valorile sinusului, cosinusului și tangentei unghiurilor de: 1) 40°; 2) 14°36′; 3) 70°20′; 4) 80°16′; 5) 145°; 6) 150°30′; 7) 150°33′; 8) 170°28′.
59. Folosind tablele, găsiți unghiurile pentru care: 1) $\sin \alpha_1=0{,}2$; 2) $\cos \alpha_2=-0{,}7$; 3) $\operatorname{tg} \alpha_3=-0{,}4$.
60. Găsiți valorile $\sin \alpha$ și $\operatorname{tg} \alpha$, dacă: 1) $\cos \alpha=\frac{1}{3}$;
2) $\cos \alpha=-0{,}5$; 3) $\cos \alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$; 4) $\cos \alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,

61. Găsiți valorile $\cos \alpha$ și $\operatorname{tg} \alpha$, dacă: 1) $\sin \alpha=0{,}6$, $0°<\alpha<90°$; 2) $\sin \alpha=\frac{1}{3}$, $90<\alpha<180°$; 3) $\sin \alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $0°<\alpha<180°$.
62. Se știe că $\operatorname{tg} \alpha=-\frac{5}{12}$. Găsiți $\sin \alpha$ și $\cos \alpha$.
63. Construiți un unghi α, dacă se știe că $\sin \alpha=-\frac{3}{5}$.
64. Construiți un unghi α, dacă se știe că $\cos \alpha=\frac{3}{5}$.
65. Demonstrați: dacă $\cos \alpha=\cos \beta$, atunci $\alpha=\beta$,
66. Demonstrați: dacă $\sin \alpha=\sin \beta$, atunci sau $\alpha=\beta$ sau $\alpha=180°-\beta$.

§ 9. TRANSFORMĂRILE FIGURILOR

55. EXEMPLE DE TRANSFORMĂRI ALE FIGURILOR

Dacă fiecare punct al unei figuri date se deplasează într-un mod oarecare, obținem o figură nouă. Se spune că această figură s-a obținut din cea dată printr-o *transformare*. Dăm cîteva exemple.

Simetria în raport cu un punct. Fie O un punct fixat și X un punct arbitrar al planului (fig. 139). Pe prelungirea segmentului OX după punctul O depunem segmentul OX' egal cu OX. Punctul X' se numește simetric cu punctul X în raport cu punctul O. Punctul simetric cu punctul O este însuși punctul O. Evident că punctul simetric cu punctul X' este punctul X.

Transformarea figurii F în figura F' care transformă fiecare punct X al figurii F în punctul simetric X' în raport cu punctul O se numește *transformare de simetrie în ra-*

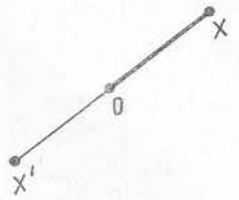


Fig. 139

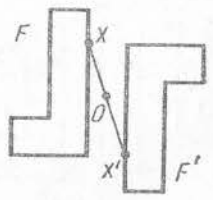


Fig. 140

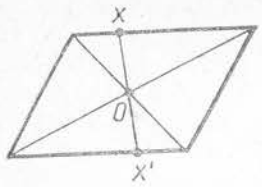


Fig. 141

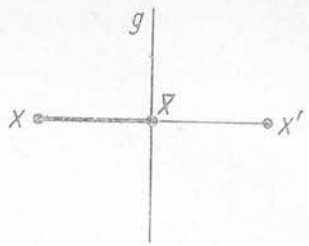


Fig. 142

port cu punctul O. În acest caz figurile F și F' se numesc *simetrice* în raport cu punctul O (fig. 140).

Dacă o transformare de simetrie în raport cu punctul O transferă figura F în sine însăși ea se numește *central-simetrică*, iar punctul O se numește *centru de simetrie*. De exemplu, paralelogramul este o figură central-simetrică. Centrul lui de simetrie este punctul de intersecție a diagonalelor (fig. 141).

Simetria în raport cu o dreaptă. Fie g o dreaptă fixată (fig. 142). Luăm un punct arbitrar X și coborîm perpendiculara $X\bar{X}$ pe dreapta g. Pe prelungirea perpendicularei după punctul $\bar{X}$ depunem segmentul $\bar{X}X'$ egal cu segmentul $\bar{X}X$. Punctul X' se numește simetric cu punctul X în raport cu dreapta g. Dacă punctul X se află pe dreapta g punctul simetric cu el este însuși punctul X. Evident punctul simetric cu punctul X' este punctul X.

Transformarea figurii F în figura F', care transferă fiecare punct X al figurii F în punctul simetric X' în raport cu dreapta g se numește *transformare de simetrie în raport cu dreapta g*. În acest caz figurile F și F' se numesc *simetrice* în raport cu dreapta g (fig. 143).

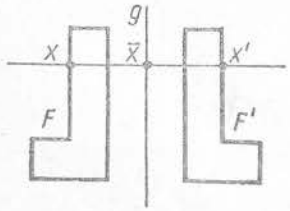


Fig. 143

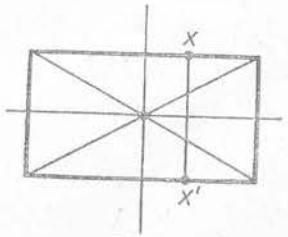


Fig. 144

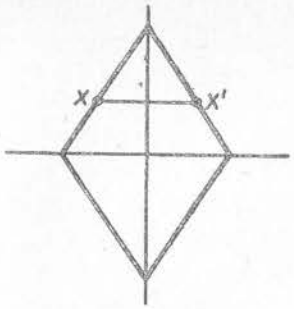


Fig. 145

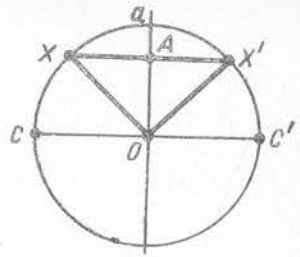


Fig. 146

Dacă transformarea de simetrie în raport cu dreapta g transferă figura F în sine însăși, această figură se numește *simetrică în raport cu dreapta g*, iar dreapta g se numește *axă de simetrie* a figurii. De exemplu, dreptele care trec prin punctul de intersecție a diagonalelor unui dreptunghi paralel cu laturile lui sînt axe de simetrie ale dreptunghiului (fig. 144). Dreptele pe care se află diagonalele unui romb sînt axele lui de simetrie (fig. 145).

P r o b l e m ă (6). Demonstrați că dreapta care trece prin centrul unei circumferințe este axa ei de simetrie.

R e z o l v a r e. Fie O centrul circumferinței și a o dreaptă care trece prin punctul O (fig. 146). Evident, transformarea de simetrie în raport cu dreapta a transferă punctul C al circumferinței în punctul C', iar punctul C îl lasă pe loc. Luăm un punct arbitrar X pe circumferință și construim punctul X', în care trece punctul X la simetria în raport cu dreapta a.

Triunghiurile OAX și OAX' sînt egale conform criteriului întîi. Ele au unghiurile de la vîrful A drepte, latura OA comună, iar laturile AX și AX' egale în conformitate cu definiția simetriei. Din egalitatea triunghiurilor rezultă egalitatea laturilor OX și OX', adică punctul X' aparține circumferinței. Iar aceasta înseamnă că la simetria în raport cu dreapta a circumferința trece în sine însăși, adică a este axa de simetrie a circumferinței.

Omotetia. Fie F o figură dată și O un punct fixat

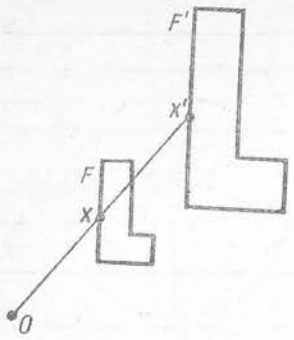


Fig. 147

(fig. 147). Printr-un punct arbitrar X al figurii F ducem semidreapta OX şi depunem pe ea un segment OX', egal cu $k \cdot OX$, unde k este un număr pozitiv. Transformarea figurii F la care orice punct al ei X trece în punctul X' construit în modul indicat se numeşte *omotetie în raport cu centrul O*. Numărul k se numeşte *coeficient de omotetie*. Figurile F şi F' se numesc *omotetice*.

56. MIŞCAREA

Transformarea unei figuri în altă figură se numeşte *mişcare* dacă ea păstrează distanţa dintre puncte, adică transferă orice două puncte X şi Y ale unei figuri în punctele X', Y' ale altei figuri astfel încît $XY=X'Y'$.

Notă. Noţiunea de mişcare în geometrie este legată de reprezentarea obişnuită despre deplasare. Dacă însă vorbind despre deplasare ne imaginăm un proces continuu, în geometrie pentru noi vor avea importanţă numai poziţiile iniţială şi finală ale figurii.

Teorema 9.1. ***Transformarea de simetrie în raport cu un punct este o mişcare.***

Demonstraţie. Fie X şi Y două puncte arbitrare ale figurii F (fig. 148). Transformarea de simetrie în raport cu punctul O le transferă în punctele X' şi Y'. Considerăm triunghiurile XOY şi $X'OY'$. Aceste triunghiuri sînt egale conform criteriului întîi de egalitate a triunghiurilor. Ele

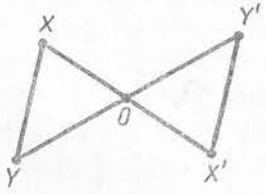


Fig. 148

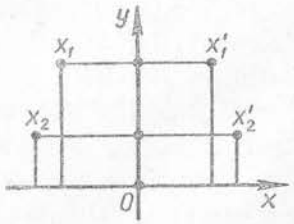


Fig. 149

au unghiurile de la vîrful O egale ca unghiuri opuse la vîrf, iar $OX=OX'$, $OY=OY'$ conform definiţiei simetriei în raport cu punctul O. Din egalitatea triunghiurilor rezultă egalitatea laturilor $XY=X'Y'$. Iar aceasta înseamnă că simetria în raport cu punctul O este mişcare. Teorema e demonstrată.

Teorema 9.2. ***Transformarea de simetrie în raport cu o dreaptă este o mişcare.***

Demonstraţie. Considerăm dreapta dată drept axa y a unui sistem cartezian de coordonate (fig. 149). Admitem că un punct arbitrar $X(x, y)$ al figurii F trece în punctul $X'(x', y')$ al figurii F'. Din definiţia simetriei în raport cu o dreaptă rezultă că punctele X şi X' au ordonatele egale, iar abscisele se deosebesc numai prin semn: $x'=-x$.

Luăm două puncte arbitrare $X_1(x_1, y_1)$ şi $X_2(x_2, y_2)$. Ele vor trece în punctele $X_1'(-x_1, y_1)$ şi $X_2'(-x_2, y_2)$.

Avem

$$X_1X^2{}_2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2,$$
$$X_1'X_2'^2=(-x_2+x_1)^2+(y_2-y_1)^2.$$

De aici rezultă că $X_1X_2=X'_1X'_2$. Aceasta înseamnă că transformarea de simetrie în raport cu dreapta este o mişcare. Teorema e demonstrată.

Se numeşte *rotaţie a planului* în jurul unui punct dat o astfel de mişcare în urma căreia orice semidreaptă ce porneşte din acest punct se roteşte sub unul şi acelaşi unghi în una şi aceeaşi direcţie. Transformarea unei figuri în plan la rotaţia lui de asemenea se numeşte rotaţie (fig. 150).

Problemă (14). Construiţi un triunghi echilateral ca-

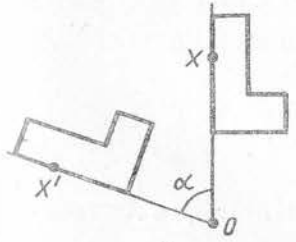


Fig. 150

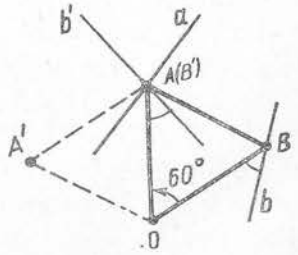


Fig. 151

re are un vîrf dat, iar celelalte două vîrfuri se află pe două drepte date.

Rezolvare. Fie OAB triunghiul căutat care are vîrful O dat, iar vîrfurile A şi B se află pe două drepte date a şi b (fig. 151). Efectuăm rotaţia dreptei b în jurul punctului O cu 60°. În acest caz dreapta b va trece în dreapta b' care trece prin punctul A Aşadar, pentru a găsi vîrful A e suficient să construim dreapta b' Vîrful A va fi punctul de intersecţie a dreptelor a şi b'.

Pentru a construi dreapta b' e suficient să luăm două puncte arbitrare ale dreptei b şi să construim punctele în care trec punctele luate la rotaţie. Dreapta b' va trece prin aceste puncte.

Vîrful A fiind construit, construim vîrful B. El coincide cu punctul de intersecţie a mediatoarei segmentului OA şi dreptei b. Unind punctele O, A, B prin segmente, obţinem triunghiul căutat. Rotind dreapta b în diferite direcţii, obţinem două triunghiuri diferite care satisfac condiţiile problemei.

57. PROPRIETĂŢILE MIŞCĂRII

Teorema 9.3. ***La mişcare punctele situate pe o dreaptă trec în puncte situate pe o dreaptă, păstrîndu-se ordinea de amplasare reciprocă a lor.***

Aceasta înseamnă că dacă punctele A, B, C situate pe o dreaptă trec în punctele A_1, B_1, C_1 aceste puncte de asemenea sînt situate pe o dreaptă; dacă punctul B e situat între punctele A şi C punctul B_1 este situat între punctele A_1 şi C_1.

Demonstraţie. Fie punctul B situat între punctele A şi C. Dacă punctele A_1, B_1, C_1 nu aparţin unei drepte ele sînt vîrfuri ale unui triunghi.

De aceea $A_1C_1 < A_1B_1 + B_1C_1$. Conform definiţiei mişcării rezultă că $AC < AB + BC$. Însă conform proprietăţii de măsurare a segmentelor $AC = AB + BC$.

Am ajuns la contradicţie. Prima afirmaţie a teoremei e demonstrată.

Să arătăm acum că punctul B_1 e situat între A_1 şi C_1.

Presupunem că A_1 e situat între B_1 şi C_1. Atunci $A_1B_1 + A_1C_1 = B_1C_1$ şi, prin urmare, $AB + AC = BC$. Însă aceasta contrazice egalitatea $AB + BC = AC$. Aşadar punctul A_1 nu poate fi situat între B_1 şi C_1. În mod analog se demonstrează că punctul C_1 nu poate fi situat între A_1 şi B_1. Deoarece din trei puncte A_1, B_1, C_1 unul este situat între celelalte două, acest punct poate fi numai B_1. Teorema e complet demonstrată.

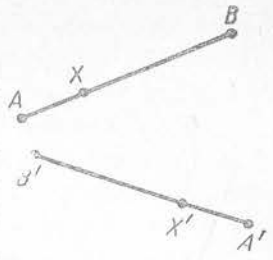


Fig. 152

Din teorema 9.3 rezultă că ***la mişcare dreptele trec în drepte, semidreptele — în semidrepte, segmentele în segmente.***

Să explicăm aceasta, luînd drept exemplu un segment. Fie AB un segment dat. La mişcare punctele A şi B trec în anumite puncte A' şi B' (fig. 152). Să arătăm că segmentul AB trece în segmentul $A'B'$. Luăm un punct arbitrar X pe segmentul AB. El trece într-un punct oarecare X' al dreptei $A'B'$ situat între punctele A' şi B' (teorema 9.3), adică punctul X al segmentului AB trece în punctul X' al segmentului $A'B'$. Oare pentru fiecare punct X' al segmentului $A'B'$ se va găsi un punct X al segmentului AB, care la mişcarea noastră trece în punctul X'? Da, pentru fiecare punct. Dacă se ia un astfel de punct X, pe segmentul AB încît $AX = A'X'$, anume el trece în punctul X'.

Fie AB şi AC două semidrepte care pleacă din punctul A şi nu se află pe aceeaşi dreaptă (fig. 153). La mişcare aceste semidrepte trec în anumite semidrepte A_1B_1 şi A_1C_1.

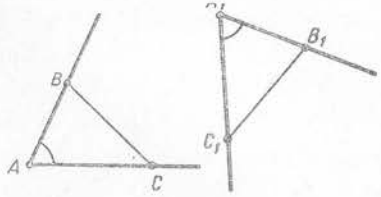


Fig. 153

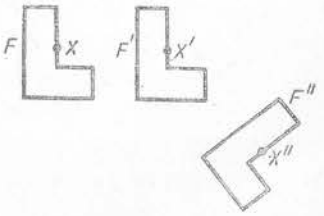


Fig. 154

Deoarece mişcarea păstrează distanţele, triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ sînt egale conform criteriului al treilea de egalitate a triunghiurilor. Din egalitatea triunghiurilor rezultă egalitatea unghiurilor BAC şi $B_1A_1C_1$. Prin urmare, la mişcare se păstrează unghiurile dintre semidrepte.

Admitem că figura F se transferă printr-o mişcare în figura F', iar figura F' se transferă printr-o mişcare în figura F'' (fig. 154). Admitem că la prima mişcare punctul X al figurii F trece în punctul X' al figurii F', iar la mişcarea a doua punctul X' al figurii F' trece în punctul X'' al figurii F''. Atunci transformarea figurii F în figura F'', la care un punct arbitrar X al figurii F trece în punctul X'' al figurii F'', păstrează distanţa dintre puncte şi deci este de asemenea o mişcare. Această proprietate a mişcării se exprimă prin cuvinte astfel: ***două mişcări efectuate succesiv dau din nou o mişcare.***

Admitem că transformarea figurii F în figura F' transferă puncte diferite ale figurii F în puncte diferite ale figurii F'. Admitem că la această transformare un punct arbitrar X al figurii F trece într-un punct X' al figurii F'. Transformarea figurii F' în figura F la care punctul X' trece în punctul X se numeşte *transformare inversă* celei date. Mişcarea păstrează distanţa dintre puncte de aceea ea transferă puncte diferite în puncte diferite. Evident, ***transformarea inversă unei mişcări este de asemenea o mişcare.***

58. EGALITATEA FIGURILOR

Două figuri se numesc *egale* dacă printr-o mişcare ele se transferă una în alta.

Pentru notaţia egalităţii figurilor se foloseşte semnul obişnuit de egalitate. Notaţia $F=F'$ înseamnă că figura F este egală cu figura F'. În notaţia egalităţii triunghiurilor: $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$ se presupune că vîrfurile care se suprapun la mişcare se află pe locurile corespunzătoare. Dacă ţinem cont de această condiţie *egalitatea triunghiurilor definită prin suprapunerea lor printr-o mişcare şi egalitatea după cum am înţeles-o pînă acum exprimă unul şi acelaşi lucru.* Să demonstrăm aceasta.

Admitem că triunghiul ABC printr-o mişcare se suprapune cu triunghiul $A_1B_1C_1$ şi anume vîrful A trece în vîrful A_1, B — în B_1 şi C în C_1. Deoarece la mişcare se păstrează distanţele şi unghiurile pentru triunghiurile noastre avem $AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$, $AC=A_1C_1$, $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, $\angle C=\angle C_1$, adică triunghiurile sînt egale în sensul considerat pînă acum.

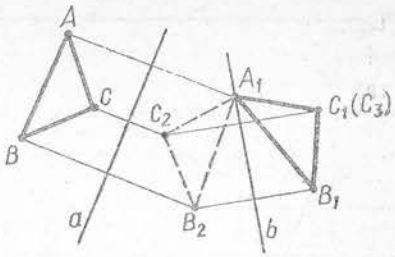


Fig. 155

Fie acum că triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ au $AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$, $AC=A_1C_1$, $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, $\angle C=\angle C_1$. Să demonstrăm că ele se suprapun printr-o mişcare şi vîrful A trece în A_1, B — în B_1, C în C_1. Supunem triunghiul ABC unei transformări de simetrie în raport cu dreapta a care este perpendiculară pe segmentul AA_1 şi trece prin mijlocul lui (fig. 155). Obţinem triunghiul $A_1B_2C_2$. Supunem acest triunghi simetriei în raport cu dreapta b care uneşte punctul A_1 cu mijlocul segmentului B_1B_2. Obţinem triunghiul $A_1B_1C_3$.

Dacă punctele C_1 şi C_3 sînt situate de aceeaşi parte a dreptei A_1B_1, ele coincid. Într-adevăr, deoarece unghiurile $B_1A_1C_1$ şi $B_1A_1C_3$ sînt egale, semidreptele A_1C_1 şi A_1C_3 coincid şi întrucît segmentele A_1C_1 şi A_1C_3 sînt egale, punctele C_1 şi C_3 coincid. Aşadar, triunghiul ABC printr-o mişcare a fost transferat în triunghiul $A_1B_1C_1$.

Dacă punctele C_1 şi C_3 sînt situate de diferite părţi ale dreptei A_1B_1, pentru demonstraţie trebuie să mai aplicăm o simetrie în raport cu dreapta A_1B_1.

59. TRANSFORMAREA DE ASEMĂNARE ŞI PROPRIETĂŢILE EI

Transformarea figurii F în figura F' se numeşte *transformare de asemănare* dacă la această transformare distanţele dintre puncte se schimbă de unul şi acelaşi număr de ori

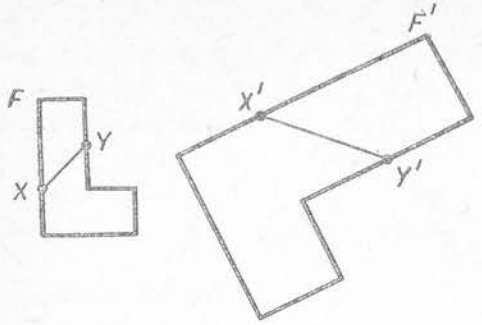


Fig. 156

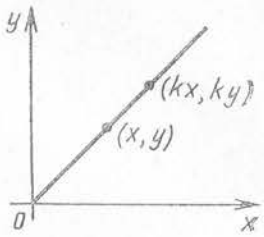


Fig. 157

(fig. 156). Aceasta înseamnă că dacă la transformarea de asemănare punctele arbitrare X, Y ale figurii F trec în punctele X', Y' ale figurii F', atunci $X'Y'=k.\ XY$ şi numărul k este unul şi acelaşi pentru toate punctele X, Y. Numărul k se numeşte *coeficient de asemănare*. Dacă coeficientul $k=1$, transformarea de asemănare, evident, este o mişcare.

Teorema 9.4. ***Omotetia este o transformare de asemănare.***

Demonstraţie. Fie O centrul de omotetie şi k — coeficientul de omotetie (fig. 157). Introducem coordonatele carteziene x, y, luînd punctul O drept originea coordonatelor. Considerăm transformarea la care punctul arbitrar (x, y) trece în punctul (kx, ky). Anume aceasta este omotetia menţionată.

Fie $A(x_1, y_1)$ un punct arbitrar al figurii. El trece în punctul $A'(kx_1, ky_1)$. Dreapta OA trece prin originea coordonatelor şi deci ecuaţia ei este $ax+by=0$. Coordonatele punctului A' satisfac această ecuaţie, deoarece $akx_1+bky_1=k(ax_1+by_1)=0$. Deci, punctul A' aparţine dreptei OA. Şi deoarece x_1 şi kx_1, y_1 şi ky_1 au acelaşi semn, A' aparţine semidreptei OA. Avem:

$$OA=\sqrt{x_1^2+y_1^2},\quad OA'=\sqrt{(kx_1)^2+(ky_1)^2}=k\sqrt{x_1^2+y_1^2}.$$

De aici $OA'=kOA$. Prin urmare, transformarea într-adevăr

este o omotetie în raport cu centrul O şi coeficientul de omotetie k.

Luăm acum două puncte arbitrare $A(x_1, y_1)$ şi $B(x_2, y_2)$. Ele trec în punctele $A'(kx_1, ky_1)$, $B'(kx_2, ky_2)$. Avem:

$$AB^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2,$$
$$A'B'^2=(kx_2-kx_1)^2+(ky_2-ky_1)^2=$$
$$=k^2[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]=k^2AB^2.$$

De aici $A'B'=kAB$. Iar aceasta înseamnă anume că transformarea considerată este o transformare de asemănare. Teorema e demonstrată.

Menţionăm că nu orice transformare de asemănare este o omotetie. Dacă supunem o figură dată F unei omotetii, iar figura obţinută în acest caz F' — unei mişcări arbitrare ca rezultat obţinem o figură oarecare F''. Transformarea figurii F în F'', evident, va fi o transformare de asemănare, însă ea nu este în genere o omotetie.

La fel ca şi pentru mişcare se demonstrează că la o transformare de asemănare trei puncte A, B, C situate pe o dreaptă trec în trei puncte A_1, B_1, C_1 situate de asemenea pe o dreaptă. Şi dacă punctul B e situat între punctele A şi C, punctul B_1 e situat între punctele A_1 şi C_1. De aici rezultă că ***transformarea de asemănare transferă dreptele în drepte, semidreptele în semidrepte, segmentele în segmente.***

Să demonstrăm că ***transformarea de asemănare păstrează unghiurile dintre semidrepte.*** Într-adevăr, admitem că transformarea de asemănare cu coeficientul k transferă unghiul ABC în unghiul $A_1B_1C_1$ (fig. 158). Supunem unghiul ABC unei transformări de omotetie în raport cu vîrful lui B şi coeficientul de omotetie k. Atunci punctele A şi C trec în

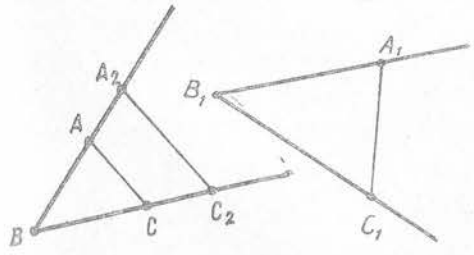


Fig. 158

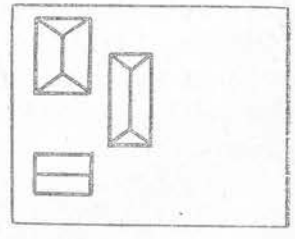


Fig. 159

punctele A_2 și C_2. Triunghiurile A_2BC_2 și $A_1B_1C_1$ sînt egale conform criteriului al treilea. Din egalitatea triunghiurilor rezultă egalitatea unghiurilor A_2BC_2 și $A_1B_1C_1$. Deci, unghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sînt egale. Ceea ce trebuia demonstrat.

Transformarea de asemănare se aplică pe larg în practică la efectuarea desenelor pentru piesele mașinilor, construcțiilor, pentru planurile de teren ș.a. Aceste desene reprezintă transformări de asemănare ale imaginilor închipuite în mărime naturală. Coeficientul de asemănare în cazul dat se numește *scară*. De exemplu, dacă lotul de pămînt se reprezintă la scara 1 : 100 aceasta înseamnă că unui centimetru de pe plan îi corespunde 1 m de pe teren.

Problemă (36). În figura 159 e reprezentat planul lotului unei gospodării la scara 1 : 1000. Să se determine dimensiunile lotului gospodăriei (lungimea și lățimea).

Rezolvare. Lungimea și lățimea lotului gospodăriei pe plan sînt egale cu 3,6 cm și 2,8 cm. Deoarece planul este efectuat la scara 1 : 1000, dimensiunile lotului gospodăriei sînt egale respectiv cu $3{,}6\times1000=36$ (m), $2{,}8\times1000=28$ (m).

60. ASEMĂNAREA FIGURILOR

Două figuri se numesc *asemenea* dacă ele se transferă una în alta printr-o transformare de asemănare. Pentru a nota asemănarea figurilor, se folosește un semn special: $\sim$. Cele scrise $F\sim F'$ se citesc astfel: „Figura F este asemenea cu figura F'". În notația asemănării triunghiurilor: $\triangle ABC\sim\triangle A_1B_1C_1$ se presupune că vîrfurile care se suprapun printr-o transformare de asemănare se află pe locurile corespunzătoare, adică A trece în A_1, B — în B_1 și C — în C_1.

Din proprietățile transformării de asemănare rezultă că ***figurile asemenea au unghiurile corespunzătoare egale, iar segmentele corespunzătoare proporționale.*** În particular, triunghiurile asemenea ABC și $A_1B_1C_1$ au

$$\angle A=\angle A_1,\ \angle B=\angle B_1,\ \angle C=\angle C_1;$$

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AC}{A_1C_1}.$$

Următoarea teoremă ne dă criteriile de asemănare a triunghiurilor:

Teorema 9.5. ***Două triunghiuri sînt asemenea:***

1) dacă două unghiuri ale unuia sînt egale respectiv cu două unghiuri ale celuilalt;

2) dacă două laturi ale unuia sînt proporționale cu două laturi ale celuilalt și unghiurile formate de aceste laturi sînt egale;

3) dacă laturile unui triunghi sînt proporționale cu laturile celuilalt.

Demonstrație. Fie ABC și $A'B'C'$ două triunghiuri, pentru care are loc una din condițiile:

1) $\angle A=\angle A_1,\ \angle B=\angle B_1$,

2) $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1},\ \angle A=\angle A_1$;

3) $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}=\frac{BC}{B_1C_1}$.

Să demonstrăm că triunghiurile sînt asemenea. Fie $k=\frac{AB}{A_1B_1}$. Supunem triunghiul $A_1B_1C_1$ unei transformări de asemănare cu coeficientul de asemănare k, de exemplu, unei transformări de omotetie (fig. 160). Atunci vom obține un triunghi oarecare $A_2B_2C_2$ egal cu triunghiul ABC. Într-adevăr, în primul caz avem:

$$\angle A=\angle A_1=\angle A_2,$$
$$\angle B=\angle B_1=\angle B_2,$$
$$A_2B_2=kA_1B_1=AB.$$

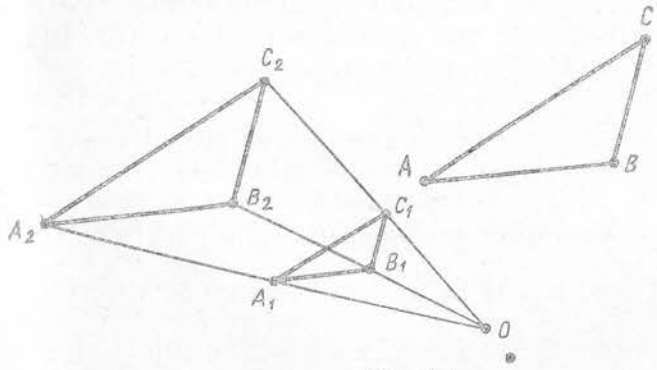


Fig. 160

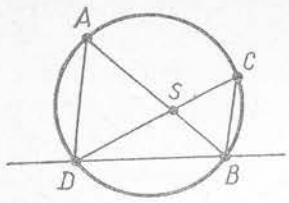


Fig. 161

Triunghiurile ABC şi $A_2B_2C_2$ sînt egale conform criteriului al doilea de egalitate a triunghiurilor.

În cazur al doilea

$$\angle A=\angle A_2,\ A_2B_2=AB,\ A_2C_2=AC.$$

Triunghiurile sînt egale conform criteriului întîi de egalitate a triunghiurilor.

În cazul al treilea

$$A_2B_2=AB,\ B_2C_2=BC,\ A_2C_2=AC.$$

Triunghiurile sînt egale conform criteriului al treilea de egalitate a triunghiurilor. Deoarece triunghiul $A_2B_2C_2$ este egal cu triunghiul ABC primul se transferă în al doilea printr-o mişcare. Deci, triunghiul $A_1B_1C_1$ se transformă în triunghiul ABC prin efectuarea succesivă a unei transformări de asemănare şi a unei mişcări, iar aceasta este o transformare de asemănare. Criteriile de asemănare ale triunghiurilor sînt demonstrate.

Problemă (37). Coardele AB şi CD ale unei circumferinţe se intersectează în punctul S. Demonstraţi că $AS\cdot BS=CS\cdot DS$.

Rezolvare. Ducem dreapta BD (fig. 161). Punctele A şi C sînt situate în acelaşi semiplan în raport cu dreapta BD şi anume în semiplanul unde este situat punctul S.

Deci unghiurile înscrise DCB şi DAB sînt egale. La fel se demonstrează şi egalitatea unghiurilor înscrise ABC şi ADC. Din egalitatea unghiurilor indicate rezultă că triunghiurile ASD şi CSB sînt asemenea (teorema 9.5). Din asemănarea triunghiurilor rezultă proporţia

$$\frac{DS}{BS}=\frac{AS}{CS}$$

De aici $AS\cdot BS=CS\cdot DS$.

ÎNTREBĂRI PENTRU REPETARE

1. Explicaţi care puncte se numesc simetrice în raport cu un punct dat.
2. Care transformare se numeşte simetrie în raport cu un punct dat?

3. Care figură se numeşte central simetrică?
4. Ce numim centru de simetrie al figurii? Daţi un exemplu de figură central simetrică.
5. Care puncte se numesc simetrice în raport cu o dreaptă dată?
6. Care transformare se numeşte simetrie în raport cu o dreaptă dată?
7. Care figură se numeşte simetrică în raport cu o dreaptă dată?
8. Ce numim axă de simetrie a figurii? Daţi un exemplu.
9. Care transformare se numeşte omotetie? Ce este centru de omotetie, coeficient de omotetie?
10. Care transformare a figurii se numeşte mişcare?
11. Demonstraţi că simetria în raport cu un punct este o mişcare.
12. Demonstraţi că simetria în raport cu o dreaptă este o mişcare.
13. Explicaţi ce este rotaţia.
14. Demonstraţi că la mişcare punctele situate pe o dreaptă trec în puncte situate pe o dreaptă şi se păstrează ordinea lor de amplasare reciprocă.
15. În ce trec dreptele, semidreptele, segmentele la mişcare?
16. Demonstraţi că la mişcare se păstrează unghiurile.
17. Care figuri se numesc egale?
18. Ce numim transformare de asemănare?
19. Demonstraţi că omotetia este o transformare de asemănare.
20. Demonstraţi că transformarea de asemănare păstrează unghiurile.
21. Care figuri se numesc asemenea?
22. Formulaţi şi demonstraţi criteriile de asemănare a triunghiurilor.

EXERCIŢII

1. Construiţi punctele simetrice cu punctele $A(1, 1)$, $B(2, 3)$, $C(-3, 1)$, $D(-2, 2)$, $E(-3, -4)$, $F(2, -1)$ în raport cu originea coordonatelor.
2. Construiţi punctele simetrice cu două vîrfuri ale unui triunghi în raport cu cel de-al treilea vîrf al lui.
3. Demonstraţi că centrul uñei circumferinţe este centrul ei de simetrie.
4. 1) Construiţi punctele simetrice cu punctele $A(1, 1)$, $B(-2, 3)$, $C(0, -1)$ în raport cu axa x.

2) Construiți punctele simetrice cu punctele $D(2, 0)$, $E(-4, 1)$, $F(-2, -2)$ în raport cu axa y.

5. Este dat triunghiul ABC. Construiți punctul C' simetric cu C în raport cu dreapta AB, folosind compasul.
6. Demonstrați că dreapta care trece prin centrul unei circumferințe este axa ei de simetrie.
7. Construiți punctele în care trec punctele $A(1, 2)$, $B(2, 2)$, $C(-1, 1)$, $D(3, -1)$ la omotetia cu centrul în originea coordonatelor și coeficientul de omotetie egal cu: 1) 2; 2) 3.
8. La o omotetie punctul X trece în punctul X' și punctul Y — în punctul Y'. Aflați centrul de omotetie dacă punctele X, X', Y, Y' nu se află pe aceeași dreaptă.
9. La omotetie punctul X trece în punctul X'. Construiți centrul de omotetie pentru k egal cu: 1) 2; 2) 3; 3) 4.
10. Punctul X trece în punctul X' la o simetrie în raport cu un punct oarecare. Construiți punctul în care trece punctul Y la această simetrie.
11. La o simetrie în raport cu o dreaptă oarecare punctul X trece în punctul X'. Construiți punctul în care trece punctul Y la această simetrie.
12. Distanța dintre orice două puncte ale unei figuri e mai mică decît 10 cm, iar distanța dintre orice două puncte ale altei figuri e mai mare decît 10 cm. Aceste figuri vor fi oare simetrice în raport: 1) cu un punct; 2) cu o dreaptă?
13. Construiți figura în care trece triunghiul ABC la rotația în jurul vîrfului C cu un unghi de 60°: 1) după acele de ceasornic; 2) contrar acelor de ceasornic.
14. Construiți un triunghi echilateral care are un vîrf dat, iar celelalte două vîrfuri se află pe două drepte date.
15. Un triunghi poate oare avea centru de simetrie?
16. Demonstrați că patrulaterul care are centru de simetrie este un paralelogram.
17. Demonstrați că dreapta care conține mediana dusă la baza unui triunghi isoscel este axă de simetrie a triunghiului.
18. 1) Demonstrați: dacă un triunghi are axă de simetrie ea trece printr-un vîrf al lui.

    2) Demonstrați: dacă un triunghi are axă de simetrie el este isoscel.

    3) Demonstrați: dacă un triunghi are două axe de simetrie el este echilateral.
19. Demonstrați că dreapta care conține bisectoarea unui unghi este axa lui de simetrie.
20. Sînt date segmentul AB și punctul O care nu aparține

dreptei AB. Ce reprezintă figura simetrică cu segmentul AB în raport cu punctul O? Construiți această figură.

21. Sînt date dreapta a și punctul O care nu aparține acestei drepte. Ce reprezintă figura simetrică cu dreapta a în raport cu punctul O? Construiți această figură.
22. Cîte centre de simetrie are figura care constă din două drepte paralele? Unde sînt situate ele?
23. Cîte axe de simetrie are un triunghi echilateral?
24. Demonstrați că punctul de intersecție a diagonalelor unui paralelogram este centrul lui de simetrie.
25. Cîte axe de simetrie are un segment?
26. Cîte axe de simetrie are o dreaptă?
27. Demonstrați că dreptele care trec prin punctul de intersecție a diagonalelor unui pătrat, paralel cu laturile lui, sînt axe de simetrie.
28. Demonstrați că diagonalele rombului sînt axele lui de simetrie.
29. 1) Sînt date două drepte ce se intersectează și un punct care nu se află pe aceste drepte. Construiți un segment cu extremitățile pe dreptele date și mijlocul în punctul dat.

    2) Sînt date trei drepte: a, b, c care se intersectează două cîte două. Construiți un segment perpendicular pe dreapta b, cu mijlocul pe dreapta b și extremitățile pe dreptele a și c.
30. Demonstrați că segmentele de lungime egală și unghiurile cu măsura în grade egală se suprapun printr-o mișcare.
31. Paralelogramele $ABCD$ și $A_1B_1C_1D_1$ au: $AB=A_1B_1$, $AD=A_1D_1$ și $\angle A=\angle A_1$. Demonstrați că paralelogramele sînt egale, adică se suprapun printr-o mișcare.
32. Demonstrați că două romburi sînt egale dacă diagonalele lor sînt egale.
33. Demonstrați că două circumferințe de aceeași rază sînt egale, adică se suprapun printr-o mișcare.
34. Demonstrați că figura asemenea cu o circumferință este o circumferință.
35. Aflați locul geometric al punctelor care împart în raportul $m:n$ toate coardele care au drept extremitate comună un punct dat al circumferinței.
36. În figura 159 e reprezentat planul lotului unei gospodării la scara 1 : 1000. Să se determine dimensiunile lotului gospodăriei (lungimea și lățimea).
37. Coardele AB și CD ale unei circumferințe se intersectează în punctul S. Demonstrați că $AS \cdot BS = CS \cdot DS$.

38. Într-un triunghi dat înscrieți un pătrat, două vîrfuri ale căruia se află pe latura dată.
39. Laturile unui triunghi se raportă ca 4 : 5 : 6. Aflați laturile unui triunghi asemenea dacă cea mai mică dintre ele este egală cu 0,8 m.
40. Laturile unui triunghi se raportă ca 2 : 5 : 4. Aflați laturile unui triunghi asemenea dacă perimetrul lui este egal cu 55 m.
41. Demonstrați asemănarea triunghiurilor isoscele cu unghiuri egale la vîrfurile opuse bazelor.
42. Două triunghiuri isoscele au unghiurile dintre laturile laterale egale. Latura laterală și baza unui triunghi sînt egale cu 17 cm și 10 cm; baza celuilalt este egală cu 8 cm. Aflați latura lui laterală.
43. Triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ au: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $AB = 5$ m, $BC = 7$ m, $A_1B_1 = 10$ m, $A_1C_1 = 8$ m. Aflați celelalte laturi ale triunghiurilor.
44. Rezolvați problema 43 dacă $AB = 16$ cm, $BC = 20$ cm, $A_1B_1 = 12$ cm, $AC - A_1C_1 = 6$ cm.
45. Demonstrați că înălțimea unui triunghi dreptunghic coborîtă din vîrful unghiului drept împarte acest triunghi în două triunghiuri asemenea cu cel inițial.
46. Piciorul înălțimii unui triunghi dreptunghic coborîte pe ipotenuză o împarte în segmente de 9 cm și 16 cm. Aflați laturile triunghiului.
47. Ipotenuza unui triunghi dreptunghic este egală cu 25 cm, iar o catetă este egală cu 10 cm. Aflați proiecția celeilalte catete pe ipotenuză.
48. În triunghiurile asemenea ABC și $A_1B_1C_1$ sînt duse înălțimile BD și B_1D_1. Demonstrați că $\frac{BD}{B_1D_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$.
49. Într-un triunghi cu baza a și înălțimea h este înscris un pătrat astfel încît două vîrfuri ale lui se află pe baza triunghiului, iar celelalte două — pe laturile laterale. Calculați latura pătratului.
50. Unghiurile B și B_1 ale triunghiurilor ABC și $A_1B_1C_1$ sînt egale. Laturile triunghiului ABC alăturate unghiului B sînt de 2,5 ori mai mari decît laturile triunghiului $A_1B_1C_1$ alăturate unghiului B_1. Aflați AC și A_1C_1 dacă suma lor este egală cu 4,2 m.
51. În triunghiul ABC latura $AB = 15$ m, iar latura $AC = 20$ m. Pe latura AB este depus segmentul $AD = 8$ m, iar pe latura AC — segmentul $AE = 6$ m. Sînt oare asemenea triunghiurile: 1) ABC și ADE; 2) ABC și AED?
52. Rezolvați problema precedentă dacă $AD = 9$ m și $AE = 12$ m.

53. Două triunghiuri dreptunghice sînt oare asemenea dacă unul din ele are un unghi de 40°, iar celălalt are un unghi egal cu: 1) 50°; 2) 60°?
54. O dreaptă paralelă cu latura AB a triunghiului ABC intersectează latura AC în punctul P, iar latura BC — în punctul Q. Demonstrați că triunghiurile ABC și PQC sînt asemenea.
55. O dreaptă paralelă cu latura AB a triunghiului ABC împarte latura AC în raportul $m : n$, considerînd de la vîrful C. În ce raport împarte această dreaptă latura BC?
56. În triunghiul ABC e dus segmentul DE paralel cu latura AC (extremitatea D a segmentului se află pe latura AB, iar E — pe latura BC). Aflați AD, dacă $AB = 16$ cm, $AC = 20$ cm și $DE = 15$ cm.
57. În problema 56 aflați raportul $AD : BD$ dacă se știe că $AC : DE = 55 : 28$.
58. Aflați lungimea segmentului DE din problema 56, dacă:
1) $AC = 20$ cm, $AB = 17$ cm și $BD = 11{,}9$ cm;
2) $AC = 18$ dm, $AB = 15$ dm și $AD = 10$ dm.
59. Sînt date segmentele a, b, c. Construiți segmentul $x = \frac{ac}{b}$.
60. Sînt oare asemenea două triunghiuri echilaterale?
61. Sînt oare asemenea triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$, dacă:
1) $AB = 1$ m, $AC = 1{,}5$ m, $BC = 2$ m; $A_1B_1 = 10$ cm, $A_1C_1 = 15$ cm, $B_1C_1 = 20$ cm;
2) $AB = 1$ m, $AC = 2$ m, $BC = 1{,}5$ m; $A_1B_1 = 8$ dm, $A_1C_1 = 16$ dm, $B_1C_1 = 12$ dm;
3) $AB = 1$ m, $AC = 2$ m, $BC = 1{,}25$ m; $A_1B_1 = 10$ cm, $A_1C_1 = 20$ cm, $B_1C_1 = 13$ cm.
62. Laturile unui triunghi sînt egale cu 0,8 m, 1,6 m și 2 m. Aflați laturile unui triunghi asemenea cu el, perimetrul căruia este egal cu 5,5 m.
63. Perimetrul unui triunghi constituie $\frac{11}{13}$ din perimetrul unui triunghi asemenea cu el. Diferența a două laturi corespunzătoare este egală cu 1 m. Aflați aceste laturi.
64. Lungimea umbrei coșului unei uzine este egală cu 35,8 m; în același timp un țăruș care este înfipt vertical în pămînt și are înălțimea de 1,9 m aruncă o umbră cu lungimea de 1,62 m. Aflați înălțimea coșului.
65. Construiți un triunghi cu perimetrul dat asemenea cu un triunghi dat.
66. În triunghiul ABC este înscris un romb $ADEF$ astfel

încît unghiul A este comun, iar vîrful E se află pe latura BC. Aflați latura rombului, dacă $AB=c$ și $AC=b$.

67. Bazele unui trapez se raportă ca $m:n$. Aflați raportul segmentelor unei diagonale a trapezului în care ea e împărțită de cealaltă diagonală.

68. Dreapta care trece prin punctul de intersecție a diagonalelor unui trapez împarte o bază în raportul $m:n$. În ce raport împarte dreapta cealaltă bază?

69. În trapezul $ABCD$ cu diagonala AC unghiurile ABC și ACD sînt egale. Aflați diagonala AC, dacă bazele BC și AD sînt egale respectiv cu 12 m și 27 m.

70. O dreaptă paralelă cu bazele unui trapez împarte o latură laterală în raportul $m:n$. În ce raport împarte ea cea de-a doua latură laterală?

71. Prelungirile laturilor laterale AB și CD ale trapezului $ABCD$ se intersectează în punctul E. Aflați laturile triunghiului AED, dacă $AB=5$ cm, $BC=10$ cm, $CD=6$ cm, $AD=15$ cm.

72. Aflați înălțimea triunghiului AED (din problema 71) coborîtă pe latura AD, dacă $BC=7$ cm, $AD=21$ cm și înălțimea trapezului este egală cu 3 cm.

73. În triunghiul isoscel ABC cu baza AC și unghiul opus de 36° este dusă bisectoarea AD. 1) Demonstrați asemănarea triunghiurilor ABC și CAD. 2) Aflați baza triunghiului ABC, dacă latura lui laterală este egală cu a.

74. Diagonalele patrulaterului $ABCD$ se intersectează în punctul M. Demonstrați că patrulaterului i se poate circumscrie o circumferință, dacă $AM\cdot CM=BM\cdot DM$.

75. Din punctul A situat în afara unei circumferințe sînt duse două secante care intersectează circumferința în punctele B_1 și C_1, B_2 și C_2 (B_1 e situat între A și C_1, iar B_2 — între A și C_2). 1) Demonstrați asemănarea triunghiurilor AB_1C_2 și AB_2C_1. 2) Demonstrați că $AB_1\times AC_1=AB_2\cdot AC_2$.

76. Dintr-un punct M sînt duse o secantă care intersectează circumferința în punctele A și B și o tangentă cu punctul de tangență C. Demonstrați că pătratul segmentului tangentei este egal cu produsul segmentelor secantei, adică $MC^2=MA\cdot MB$.

77. Cît de departe se vede dintr-un avion care zboară la o înălțime de 4 km deasupra Pămîntului, dacă raza Pămîntului este de 6370 km?

78. Calculați raza orizontului care se vede din vîrful turnului de televiziune Ostanchino, dacă înălțimea lui este de 533 m.

Clasa 9

§ 10. VECTORI PE PLAN

61. TRANSLAȚIA ȘI PROPRIETĂȚILE EI

Considerăm pe plan coordonatele carteziene x, y. Transformarea figurii F, la care un punct arbitrar al ei (x, y) trece în punctul $(x+a, y+b)$, unde a și b sînt constante, se numește *translație* (fig. 162). Translația se definește prin formulele

$$x'=x+a,\ y'=y+b. \qquad (*)$$

Aceste formule exprimă coordonatele x', y' ale punctului în care trece punctul (x, y) la translație.

Translația este o mișcare. Într-adevăr, două puncte arbitrare $A(x_1, y_1)$ și $B(x_2, y_2)$ trec în punctele $A'(x_1+a, y_1+b)$, $B'(x_2+a, y_2+b)$. De aceea

$$AB^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2,$$
$$A'B'^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2.$$

De aici $AB=A'B'$. Așadar, această transformare păstrează distanțele și deci este o mișcare.

Denumirea „translație" e justificată de faptul că ***la translație punctele se deplasează după drepte paralele (sau după drepte ce coincid) la una și aceeași distanță.*** Într-adevăr, admitem că punctele $A(x_1, y_1)$ și $B(x_2, y_2)$ trec în puncte

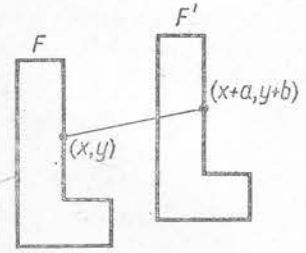


Fig. 162

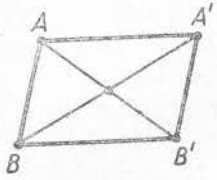


Fig. 163

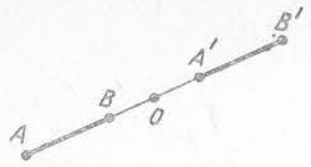


Fig. 164

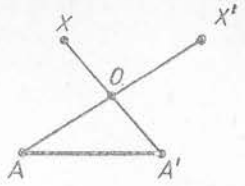


Fig 165

le $A'(x_1+a,\ y_1+b)$ şi $B'(x_2+a,\ y_2+b)$ (fig. 163) Mijlocul segmentului AB' are coordonatele

$$x=\frac{x_1+x_2+a}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2+b}{2}.$$

Are aceleaşi coordonate şi mijlocul segmentului $A'B$ De aici rezultă că diagonalele patrulaterului $AA'B'B$ se intersec tează şi punctul de intersecţie le împarte în jumătate. Deci, acest patrulater este un paralelogram. Însă în paralelogram laturile opuse AA' şi BB' sînt paralele şi egale.

Menţionăm că în paralelogramul $AA'B'B$ sînt paralele şi celelalte două laturi opuse AB şi $A'B'$. De aici rezultă că ***la translaţie orice dreaptă trece într-o dreaptă paralelă (sau în sine).***

Notă. La demonstraţia precedentă am presupus că punctul B nu se află pe dreapta AA'. În cazul, cînd punctul B se află pe dreapta AA', punctul B' de asemenea se află pe această dreaptă, deoarece mijlocul segmentului AB' coincide cu mijlocul segmentului BA' (fig. 164). Deci, toate punctele A, B, A', B' sînt situate pe aceeaşi dreaptă. Calculăm distanţele

$$AA'=\sqrt{(x_1+a+x_1)^2+(y_1+b-y_1)^2}=\sqrt{a^2+b^2},$$

$$BB'=\sqrt{(x_2+a-x_2)^2+(y_2+b-y_2)^2}=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Aşadar, în acest caz punctele A şi B se deplasează pe dreapta AB la una şi aceeaşi distanţă $\sqrt{a^2+b^2}$, iar dreapta AB trece în sine.

Teorema 10.1. ***Oricare ar fi două puncte A şi A' există o translaţie şi numai una singură, la care punctul A trece în punctul A'.***

Demonstraţie. Să începem cu demonstraţia unicităţii. Fie X un punct arbitrar al figurii, iar X' punctul, în care el trece la translaţie (fig. 165). După cum ştim, segmentele XA' şi AX' au mijlocul comun O. Punctul X determină în mod univoc punctul O — mijlocul segmentului $A'X$ Iar punctele A şi O determină în mod univoc punctul X', deoarece O este mijlocul segmentului AX'. Faptul că punctul X' este determinat univoc pune în evidenţă unicitatea translaţiei.

Să demonstrăm existenţa translaţiei, în urma căreia punctul A trece în punctul A'. Să introducem coordonatele carteziene pe plan. Fie a_1, a_2 coordonatele punctului A, iar a_1', a_2' coordonatele punctului A'. Translaţia, dată prin formulele

$$x'=x+a_1'-a_1,\ y'=y+a_2'-a_2,$$

transferă punctul A în A'. Într-adevăr, pentru $x=a_1$ şi $y=a_2$ obţinem: $x'=a_1'$, $y'=a_2'$. Teorema este demonstrată complet.

Problemă (3). La o translaţie punctul (1, 1) trece în punctul (—1, 0). În ce punct trece originea coordonatelor?

Rezolvare. Orice translaţie este determinată de formulele $x'=x+a$, $y'=y+b$. Întrucît punctul (1, 1) trece în punctul (—1, 0), avem: $-1=1+a$, $0=1+b$. De aici $a=-2$, $b=-1$. Aşadar, translaţia dată, care transferă punctul (1, 1) în punctul (—1, 0), este determinată de formulele $x'=x-2$, $y'=y-1$. Substituind în aceste formule coordonatele orginii ($x=0$, $y=0$), obţinem: $x'=-2$, $y'=-1$. Aşadar, originea coordonatelor trece în punctul (—2, —1).

Teorema 10.2. ***Transformarea, inversă unei translaţii, este o translaţie. În urma efectuării succesive a două translaţii se obţine de asemenea o translaţie.***

Demonstraţie. Orice translaţie este dată prin formulele de forma

$$x'=x+a,\ y'=y+b.$$

Transformarea inversă este determinată de formulele de aceeaşi formă:

$$x=x'-a,\ y=y'-b$$

și, prin urmare, este o translație. Prima afirmație este demonstrată.

Fie acum date două translații, determinate prin formulele

$$x' = x + a,\ y' = y + b;$$
$$x'' = x' + c,\ y'' = y' + d.$$

Transformarea, care se obține ca rezultat al efectuării succesive a acestor translații, este determinată de formulele

$$x'' = x + a + c,\ y'' = y + b + d.$$

Această transformare este o translație. Teorema este demonstrată complet.

62. NOȚIUNE DE VECTOR

Unele mărimi fizice (forța, viteza, accelerația etc.) se caracterizează nu numai prin valoare, ci și prin direcție. De exemplu, pentru a caracteriza mișcarea unui corp într-un moment dat nu e suficient să spunem, că el se mișcă cu viteza de 60 km/oră, trebuie să mai indicăm și direcția mișcării lui, adică direcția vitezei. În legătură cu aceasta mărimile fizice indicate e bine să fie reprezentate prin segmente orientate. Un asemenea mod de reprezentare a mărimilor fizice se deosebește nu numai prin intuitivitate. Acest mod de reprezentare are și alte avantaje. Dăm un exemplu. Experiențele arată că dacă aplicăm unui corp A două forțe a și b (fig. 166), acțiunea lor este echivalentă cu acțiunea unei singure forțe c, care se reprezintă prin diagonala paralelogramului, construit pe segmentele a și b. Am putea da și alte exemple, în care operațiile cu mărimile fizice, reprezentate prin segmente orientate, se reduc la construcții simple, ca și în exemplul dat.

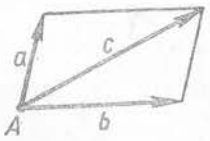


Fig. 166

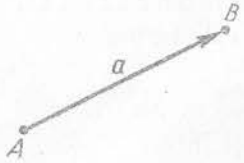


Fig. 167

Segmentul orientat se numește *vector* (fig. 167). Direcția vectorului se determină, indicîndu-se originea și extremitatea lui. În desen direcția vectorului se notează prin o săgeată. Pentru a nota vectorii, vom folosi literele mici ale alfabetului latin a, b, c, ... Se poate nota, de asemenea, un vector și astfel: se indică originea și extremitatea lui. În acest caz pe primul loc se scrie originea vectorului. Uneori în locul cuvîntului „vector" deasupra notației literale a vectorului se scrie o săgeată sau o liniuță. În figura 167 vectorul poate fi notat astfel:

$\bar{a}$ sau $\bar{AB}$.

63. VALOREA ABSOLUTĂ ȘI DIRECȚIA VECTORULUI

Două semidrepte se numesc *la fel orientate* (coorientate), dacă ele se suprapun printr-o translație, adică există o translație, care transferă o semidreaptă în cealaltă semidreaptă.

Dacă semidreptele a și b sînt la fel orientate, semidreptele a și c sînt de asemenea la fel orientate.

Într-adevăr, deoarece a și b sînt la fel orientate, există o translație, care transferă semidreapta a în b. Întrucît b și c sînt la fel orientate, există o translație, care transferă semidreapta b în c. Efectuînd succesiv aceste două translații, se obține o translație, care transformă semidreapta a în semidreapta c. Prin urmare, semidreptele a și c sînt la fel orientate.

Două semidrepte se numesc *opus orientate*, dacă fiecare din ele este la fel orientată cu semidreapta complementară a celeilalte.

Problemă (5). AB și CD sînt situate de aceeași parte a secantei BC. Demonstrați, că semidreptele BA și CD sînt la fel orientate.

Rezolvare. Supunem semidreapta CD translației, la care punctul C trece în punctul B (fig. 168). În acest caz dreapta CD se va suprapune pe dreapta BA. Punctul D, deplasîndu-se după o dreaptă paralelă cu CB, rămîne în același semiplan în raport cu dreapta BC. De aceea se-

midreapta CD se va suprapune pe semidreapta BA, deci, aceste semidrepte sînt *la fel orientate*.

Vectorii $\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$ se numesc *la fel orientaţi*, dacă semidreptele AB şi CD sînt la fel orientate. Ei se numesc *opus orientaţi*, dacă aceste semidrepte sînt opus orientate. Se numeşte *valoare absolută* (sau *modul*) a unui vector lungimea segmentului, ce reprezintă vectorul. Valoarea absolută a vectorului $\bar{a}$ se notează prin $|\bar{a}|$.

Doi vectori se numesc *egali*, dacă ei pot fi suprapuşi printr-o translaţie. Aceasta înseamnă că există o translaţie, care transferă originea şi extremitatea unui vector respectiv în originea şi extremitatea celuilalt vector. De aici rezultă că ***vectorii egali sînt la fel orientaţi şi egali după valoarea absolută.*** Reciproc, ***dacă vectorii sînt la fel orientaţi şi egali după valoarea absolută, ei sînt egali.*** Într-adevăr, fie AB şi CD vectori la fel orientaţi, egali după valoarea absolută (fig. 169). Translaţia, care transferă punctul C în punctul A ,suprapune semidreapta CD pe semidreapta AB, deoarece ele sînt la fel orientate. Dar întrucît segmentele AB şi CD sînt egale, în acest caz punctul D se suprapune pe punctul B adică translaţia transferă vectorul $\overline{CD}$ în vectorul $\overline{AB}$. Deci, vectorii $\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$ sînt egali.

Problemă (9). $ABCD$ este paralelogram. Demonstraţi egalitatea vectorilor $\overline{AB}$ şi $\overline{DC}$.

Rezolvare. Supunem vectorul $\overline{AB}$ translaţiei, la care punctul A trece în punctul D (fig. 170). La această translaţie punctul A se deplasează pe dreapta AD, deci, punctul B se deplasează pe dreapta paralelă BC. Dreapta AB trece într-o dreaptă paralelă, deci, în dreapta DC. Prin urmare, punctul B trece în C. Aşadar, translaţia noastră transferă vectorul $\overline{AB}$ în vectorul $\overline{DC}$, deci, aceşti vectori sînt egali.

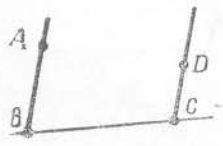


Fig 168

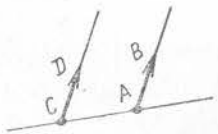


Fig. 169

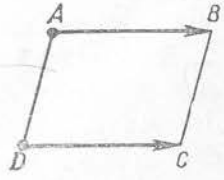


Fig 170

Originea unui vector poate să coincidă cu extremitatea lui. Un asemenea vector va fi numit *vector nul*. Vectorul nul se notează prin zero cu liniuţă ($\bar{0}$). Despre direcţia vectorului nul nu se vorbeşte. Valoarea absolută a vectorului nul se consideră egală cu zero. Prin definiţie toţi vectorii nuli sînt egali.

Din proprietăţile translaţiei (teorema 10.1) rezultă că ***de la orice punct se poate depune un vector, egal cu vectorul dat, şi numai unul singur.*** Pentru a demonstra aceasta, e suficient să efectuăm translaţia vectorului dat, la care originea lui va trece în punctul dat.

64. COORDONATELE VECTORULUI

Admitem că vectorul $\bar{a}$ are drept origine punctul $A_1(x_1, y_1)$, iar drept extremitate — punctul $A_2(x_2, y_2)$. Vom numi *coordonate* ale vectorului $\bar{a}$ numerele $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$. Coordonatele vectorului le vom scrie alături de notaţia literală a vectorului, în cazul dat $\bar{a}(a_1, a_2)$ sau, pur şi simplu, $(\overline{a_1, a_2})$. Coordonatele vectorului nul sînt egale cu zero.

Din formula, care exprimă distanţa dintre două puncte prin coordonatele lor, rezultă că valoarea absolută a vectorului cu coordonatele a_1, a_2 este egală cu

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Teorema 10.3. ***Vectorii egali au coordonatele corespunzătoare egale.*** Reciproc, ***dacă coordonatele corespunzătoare ale vectorilor sînt egale, vectorii sînt egali.***

Demonstraţie. Fie $A_1(x_1, y_1)$ şi $A_2(x_2, y_2)$ originea şi extremitatea vectorului $\bar{a}$. Deoarece vectorul $\bar{a}'$ egal cu el se obţine din $\bar{a}$ printr-o translaţie, originea şi extremitatea lui vor fi respectiv: $A'_1(x_1 + c, y_1 + d)$, $A'_2(x_2 + c, y_2 + d)$. De aici se vede că ambii vectori $\bar{a}$ şi $\bar{a}'$ au aceleaşi coordonate: $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$.

Să demonstrăm acum afirmaţia reciprocă. Admitem că coordonatele corespunzătoare ale vectorilor $\overline{A_1A_2}$ şi $\overline{A'_1A'_2}$ sînt egale. Vom demonstra că vectorii sînt egali. Fie x'_1 şi y'_1 coordonatele punctului A'_1, iar x'_2 şi y'_2 coordonatele

punctului A'_2. Conform condiției teoremei $x_2-x_1=x'_2-x'_1$, $y_2-y_1=y'_2-y'_1$. De aici $x'_2=x_2+x'_1-x_1$, $y'_2=y_2+y'_1-y_1$. Translația, determinată de formulele

$$x'=x+x'_1-x_1,\ y'=y+y'_1-y_1,$$

transferă punctul A_1, în punctul A'_1, iar punctul A_2 în punctul A'_2, adică vectorii $\overline{A_1A_2}$ și $\overline{A'_1A'_2}$ sînt egali. Teorema este demonstrată.

Problemă (13). Sînt date trei puncte: $A(1, 1)$, $B(-1, 0)$, $C(0, 1)$. Găsiți un astfel de punct $D(x, y)$, încît vectorii $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$ să fie egali.

Rezolvare. Coordonatele vectorului $\overline{AB}$ vor fi -2, -1. Coordonatele vectorului $\overline{CD}$ vor fi $x-0$, $y-1$. Întrucît $\overline{AB}=\overline{CD}$, avem $x-0=-2$, $y-1=-1$. De aici aflăm coordonatele punctului D: $x=-2$, $y=0$.

65. ADUNAREA VECTORILOR

Se numește *sumă a vectorilor* $\bar{a}$ și $\bar{b}$ cu coordonatele a_1, a_2 și b_1, b_2 vectorul $\bar{c}$ cu coordonatele a_1+b_1, a_2+b_2, adică

$$\bar{a}(a_1,a_2)+\bar{b}(b_1, b_2)=\bar{c}(a_1+b_1, a_2+b_2).$$

Pentru orice vectori $a(a_1, a_2)$, $b(b_1, b_2)$, $c(c_1, c_2)$

$$\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a},\ \bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})=(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}.$$

Pentru a demonstra aceasta e suficient să comparăm coordonatele corespunzătoare ale vectorilor din părțile stîngă și dreaptă ale egalităților. Vedem că ele sînt egale. Dar conform teoremei 10.3 vectorii cu coordonatele respectiv egale sînt egali.

Teorema 10.4. *Oricare ar fi punctele A, B, C are loc egalitatea vectorială*

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}.$$

Demonstrație. Fie $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ punctele date. Coordonatele vectorului $\overline{AB}$ vor fi x_2-x_1, y_2-y_1, coordonatele vectorului $\overline{BC}$ vor fi x_3-x_2, y_3-y_2. Prin urmare, coordonatele vectorului $\overline{AB}+\overline{BC}$ vor fi x_3-x_1, y_3-y_1. Acestea sînt coordonatele vectorului $\overline{AC}$. Conform teoremei 10.3, vectorii $\overline{AB}+\overline{BC}$ și $\overline{AC}$ sînt egali. Teorema este demonstrată.

Teorema 10.4 indică următorul procedeu de construcție a sumei unor vectori arbitrari $\bar{a}$ și $\bar{b}$. Din extremitatea vectorului $\bar{a}$ trebuie să depunem vectorul $\bar{b}'$, egal cu vectorul b. Atunci vectorul, a cărui origine coincide cu originea vectorului $\bar{a}$, iar extremitatea — cu extremitatea vectorului b', va fi suma vectorilor $\bar{a}$ și $\bar{b}$ (fig. 171, *a*). Acest procedeu de obținere a sumei a doi vectori se numește *„regula triunghiului"* de adunare a vectorilor.

În cazul cînd vectorii au origine comună, suma lor se reprezintă prin diagonala paralelogramului, construit pe acești vectori („regula paralelogramului", fig. 171, *b*). Într-adevăr, $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$, însă, $\overline{BC}=\overline{AD}$. Deci, $\overline{AB}+\overline{AD}=\overline{AC}$.

Problemă (16). Ce forță trebuie aplicată pentru a ține pe loc (ca să nu lunece) un corp cu greutatea P, situat pe un plan înclinat (fig. 172)?

Rezolvare. Acțiunea forței de greutate P este echivalentă cu acțiunea a două forțe, reprezentate prin vectorii $\overline{OA}$ și $\overline{OB}$. Prima e perpendiculară pe planul înclinat și nu provoacă deplasarea corpului, iar a doua este egală ca mărime cu forța F, ce ține corpul pe loc, însă-i orientată în direcție opusă. Dacă planul înclinat formează unghiul α cu planul orizontal, atunci $OB=OC\sin\alpha$. Prin urmare, forța F, care ține pe loc corpul, situat pe planul înclinat, se calculează după formula $F=P\sin\alpha$.

Se numește *diferență a vectorilor* $\bar{a}(a_1, a_2)$ și $\bar{b}(b_1, b_2)$

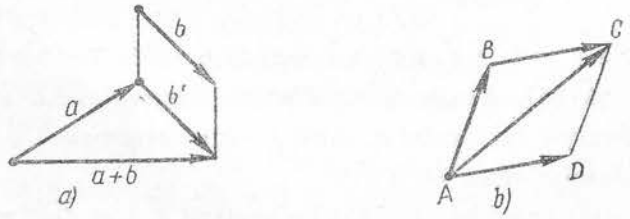


Fig. 171

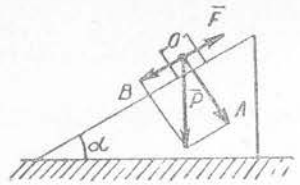


Fig 172

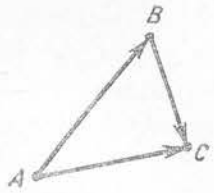


Fig. 173

un astfel de vector $\bar{c}(c_1, c_2)$, care în sumă cu vectorul $\bar{b}$ dă vectorul $\bar{a}$: $\bar{b}+\bar{c}=\bar{a}$. De aici aflăm coordonatele vectorului $\bar{c}=\bar{a}-\bar{b}$; $c_1=a_1-b_1$; $c_2=a_2-b_2$.

Problemă (19) Fie daţi doi vectori cu origine comună: $\overline{AB}$ şi $\overline{AC}$ (fig 173). Demonstraţi că $\overline{AC}-\overline{AB}=\overline{BC}$.

Rezolvare. Avem: $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$ Insă aceasta înseamnă că $\overline{AC}-\overline{AB}=\overline{BC}$

66. ÎNMULŢIREA VECTORULUI CU UN NUMĂR

Se numeşte produs al vectorului $(\overline{a_1, a_2})$ cu numărul λ vectorul $(\overline{\lambda a_1, \lambda a_2})$, adică

$$(a_1, a_2)\lambda=(\lambda a_1, \lambda a_2).$$

Prin definiţie $(\overline{a_1, a_2})\lambda=\lambda(\overline{a_1, a_2})$.

Din definiţia operaţiei înmulţirii vectorului cu un număr rezultă că oricare ar fi vectorul $\bar{a}$ şi numerele λ, μ

$$(\lambda+\mu)\bar{a}=\lambda\bar{a}+\mu\bar{a}.$$

Pentru orice doi vectori $\bar{a}$ ***şi*** $\bar{b}$ ***şi orice număr*** λ

$$\lambda(\bar{a}+\bar{b})=\lambda\bar{a}+\lambda\bar{b}.$$

Teorema 10.5. ***Valoarea absolută a vectorului*** $\lambda\bar{a}$ ***este egală cu*** $|\lambda||\bar{a}|$. ***Pentru*** $\bar{a}\neq\bar{0}$ ***direcţia vectorului*** $\lambda\bar{a}$ ***coincide cu direcţia vectorului*** $\bar{a}$, ***dacă*** $\lambda>0$, ***şi este opusă direcţiei vectorului*** $\bar{a}$, ***dacă*** $\lambda<0$.

Demonstraţie. Construim vectorii $\overline{OA}$ şi $\overline{OB}$, egali respectiv cu $\bar{a}$ şi $\lambda\bar{b}$ (O este originea coordonatelor). Fie a_1

şi a_2 coordonatele vectorului $\bar{a}$. Atunci coordonatele punctului A vor fi numerele a_1 şi a_2, iar coordonatele punctului B — numerele λa_1, λa_2. Ecuaţia dreptei OA are forma:

$$\alpha x+\beta y=0.$$

Deoarece această ecuaţie este satisfăcută de coordonatele punctului $A(a_1, a_2)$, ea este satisfăcută şi de coordonatele punctului $B(\lambda a_1, \lambda a_2)$ De aici rezultă că punctul B este situat pe dreapta OA. Coordonatele c_1, c_2 ale unui punct oarecare C, situat pe semidreapta OA, au aceleaşi semne, ca şi coordonatele a_1, a_2 ale punctului A, iar coordonatele oricărui punct, situat pe semidreapta complementară a semidreptei OA, au semne opuse. De aceea, dacă $\lambda>0$, punctul B este situat pe semidreapta OA, şi, prin urmare, vectorii a şi $\lambda\bar{a}$ sînt la fel orientaţi. Dacă $\lambda<0$, punctul B e situat pe semidreapta complementară, vectorii $\bar{a}$ şi $\lambda\bar{a}$ sînt opus orientaţi

Valoarea absolută a vectorului $\lambda\bar{a}$ este

$$|\lambda\bar{a}|=\sqrt{|\lambda a_1|^2+|\lambda a_2|^2}=|\lambda|\sqrt{a_1^2+a_2^2}=|\lambda|\,|\bar{a}|.$$

Teorema e demonstrată.

Problemă (22). Sînt date punctele $A(x_1, y_1)$ şi $B(x_2, y_2)$. Demonstraţi că vectorii $\overline{AB}$ şi $\overline{BA}$ sînt opus orientaţi.

Rezolvare. Vectorul $\overline{AB}$ are coordonatele x_2-x_1 şi y_2-y_1, iar vectorul BA — coordonatele x_1-x_2 şi y_1-y_2. Vedem că $\overline{AB}=(-1)\overline{BA}$ Deci, în virtutea teoremei 10.5 vectorii $\overline{AB}$ şi $\overline{BA}$ sînt opus orientaţi.

Doi vectori nenuli se numesc *coliniari*, dacă sînt situaţi pe aceeaşi dreaptă sau pe drepte paralele.

Teorema 10.6. ***Coordonatele corespunzătoare ale vectorilor coliniari sînt proporţionale. Şi reciproc, dacă doi vectori au coordonatele corespunzătoare proporţionale, vectorii sînt coliniari.***

Demonstraţie. Fie $\bar{a}(a_1, a_2)$ şi $\bar{b}(b_1, b_2)$ vectorii daţi. Admitem că vectorii sînt coliniari şi la fel orientaţi. Considerăm vectorul $\bar{c}=\frac{|\bar{a}|}{|\bar{b}|}\bar{b}$. Vectorul $\bar{c}$ este egal cu vecto-

rul $\bar{a}$, deoarece, conform teoremei 10.5, ei sînt la fel orientaţi şi au aceeaşi valoare absolută. Egalînd coordonatele vectorilor $\bar{a}$ şi $\bar{c}$, obţinem:

$$a_1 = \frac{|\bar{a}|}{|\bar{b}|} b_1, \quad a_2 = \frac{|\bar{a}|}{|\bar{b}|} b_2.$$

De aici $\frac{b_1}{a_1} = \frac{|\bar{b}|}{|\bar{a}|}$, $\frac{b_2}{a_2} \frac{|\bar{b}|}{|\bar{a}|}$. Deci $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}$,

adică coordonatele vectorilor $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ sînt proporţionale.

Dacă vectorii coliniari $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ sînt opus orientaţi, pentru demonstraţie trebuie să considerăm vectorul $\bar{c} = -\frac{|\bar{a}|}{|\bar{b}|}\bar{b}$.

Atunci exact la fel vom obţine iarăşi $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}$.

Admitem acum că vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ au coordonatele proporţionale. Vom demonstra că vectorii sînt coliniari. Avem:

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}.$$

Notînd valoarea comună a acestor rapoarte prin λ, obţinem: $b_1 = \lambda a_1$, $b_2 = \lambda a_2$. De aici rezultă că $\bar{b} = \lambda\bar{a}$. Însă aceasta înseamnă (teorema 10.5) că vectorii sînt coliniari.

Problemă (31). Fie vectorii $\bar{a}(1, -1)$ şi $\bar{b}(-2, m)$ coliniari. Aflaţi cu ce este egal m.

Rezolvare. Coordonatele vectorilor coliniari sînt proporţionale. Prin urmare $\frac{-2}{1} = \frac{m}{-1}$. De aici $m = 2$.

Un vector se numeşte *unitar*, dacă valoarea lui absolută este egală cu unitatea. Vectorii unitari, care au direcţiile semiaxelor de coordonate pozitive, se numesc *vectori de coordonate sau orţi*. Noi îi vom nota prin $\bar{e}_1$ (1, 0) pe axa x şi prin $\bar{e}_2$ (0, 1) pe axa y.

Orice vector $\bar{a}(a_1, a_2)$ poate fi reprezentat sub forma

$$\bar{a} = a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2.$$

Într-adevăr, $\overline{(a_1, a_2)} = \overline{(a_1, 0)} + \overline{(0, a_2)} = a_1\overline{(1, 0)} + a_2\overline{(0, 1)} = a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2$.

Problemă (35). Fie daţi vectorii $\bar{a}(1, 0)$, $\bar{b}(1, 1)$, $\bar{c}(-1, 0)$. Aflaţi astfel de numere λ şi μ, încît să fie adevărată egalitatea $\bar{c} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{b}$.

Rezolvare. Egalînd coordonatele corespunzătoare ale vectorilor $\bar{c}$ şi $\lambda\bar{a} + \lambda\bar{b}$, obţinem două ecuaţii, din care aflăm λ şi μ: $-1 = \lambda\cdot 1 + \mu\cdot 1$, $0 = \lambda\cdot 0 + \mu\cdot 1$. De aici $\mu = 0$, $\lambda = -1$.

67. PRODUSUL SCALAR AL VECTORILOR

Se numeşte *produs scalar* al vectorilor $\bar{a}(a_1, a_2)$ şi $\bar{b}(b_1, b_2)$ numărul $a_1b_1 + a_2b_2$. Pentru produsul scalar al vectorilor se foloseşte aceeaşi notaţie ca şi pentru produsul numerelor. Produsul scalar $\bar{a}\cdot\bar{a}$ se notează prin $\bar{a}^2$. Evident, $\bar{a}^2 = |\bar{a}|^2$.

Din definiţia produsului scalar al vectorilor rezultă că pentru orice vectori $\bar{a}(a_1, b_2)$, $\bar{b}(b_1, b_2)$, $\bar{c}(c_1, c_2)$

$$(\bar{a} + \bar{b})\bar{c} = \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c}.$$

Într-adevăr, partea stîngă a egalităţii este $(a_1 + b_1)c_1 + (a_2 + b_2)c_2$, iar partea dreaptă $a_1c_1 + a_2c_2 + b_1c_1 + b_2c_2$. Evident, ele sînt egale.

Se numeşte *unghi* dintre vectorii nenuli $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$ unghiul BAC. Se numeşte unghi dintre orice doi vectori $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ unghiul dintre vectorii, care au origine comună şi sînt egale cu ei. Unghiul dintre vectorii la fel orientaţi se consideră egal cu zero.

Teorema 10.7. ***Produsul scalar al vectorilor este egal cu produsul valorilor absolute prin cosinusul unghiului dintre ei.***

Demonstraţie. Fie $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ vectorii daţi şi φ unghiul dintre ei. Avem:

$$(\bar{a} + \bar{b})^2 = (\bar{a} + \bar{b})(\bar{a} + \bar{b}) = (\bar{a} + \bar{b})\bar{a} + (\bar{a} + \bar{b})\bar{b} = \bar{a}\bar{a} + \bar{b}\bar{a} + \bar{a}\bar{b} + \bar{b}\bar{b} = \bar{a}^2 + 2\bar{a}\bar{b} + \bar{b}^2,$$

sau

$$|\bar{a} + \bar{b}|^2 = |\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 + 2\bar{a}\bar{b}.$$

De aici este evident că produsul scalar $\bar{a}\bar{b}$ se exprimă prin lungimile vectorilor $\bar{a}$, $\bar{b}$ şi $\bar{a} + \bar{b}$ şi de aceea nu depinde de alegerea sistemului de coordonate, adică produsul scalar nu se va schimba, dacă sistemul de coordonate va fi ales

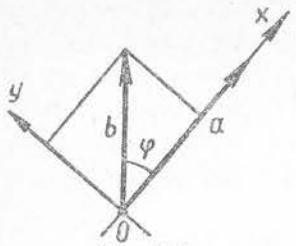


Fig. 174

în mod special. Alegem sistemul de coordonate xy, după cum e arătat în figura 174. Dacă alegem sistemul de coordonate în acest mod, coordonatele vectorului $\bar{a}$ vor fi $|\bar{a}|$ şi 0, iar coordonatele vectorului $\bar{b}$ vor fi $|\bar{b}|\cos\varphi$ şi $|\bar{b}|\sin\varphi$. Produsul scalar

$$\bar{a}\bar{b}=|\bar{a}||\bar{b}|\cos\varphi+0|\bar{b}|\sin\varphi=|\bar{a}||\bar{b}|\cos\varphi.$$

Teorema este demonstrată.

Din teorema 10.7 rezultă că ***dacă vectorii sînt perpendiculari, produsul lor scalar este egal cu zero.*** Reciproc, ***dacă produsul scalar a doi vectori nenuli este egal cu zero, vectorii sînt perpendiculari.***

Problemă (47). Fie daţi vectorii $\bar{a}(1, 0)$ şi $\bar{b}(1, 1)$. Aflaţi un număr λ astfel, încît vectorul $\bar{a}+\lambda\bar{b}$ să fie perpendicular pe vectorul $\bar{a}$.

Rezolvare. Avem: $\bar{a}(\bar{a}+\lambda\bar{b})=0$, $\bar{a}^2+\lambda(\bar{a}\bar{b})=0$. De aici

$$\lambda=-\frac{\bar{a}^2}{\bar{a}\bar{b}}=-\frac{1}{1}=-1.$$

ÎNTREBĂRI PENTRU REPETARE

1. Explicaţi ce este translaţia.
2. Demonstraţi că translaţia este o mişcare.
3. Demonstraţi că la translaţie punctele figurii se deplasează după drepte paralele (sau după drepte ce coincid) la una şi aceeaşi distanţă.
4. Demonstraţi că la translaţie o dreaptă trece într-o dreaptă paralelă (sau în sine).
5. Demonstraţi existenţa şi unicitatea translaţiei, care transferă punctul dat A în punctul dat A'.
6. Demonstraţi că transformarea inversă unei translaţii este o translaţie. Rezultatul efectuării succesive a două translaţii este o translaţie.
7. Ce este vectorul?
8. Care semidrepte se numesc la fel orientate?
9. Demonstraţi că dacă semidreapta a este la fel orientată cu semidreptele b şi c, semidreptele b şi c sînt, de asemenea la fel orientate.
10. Care semidrepte se numesc opus orientate?
11. Ce înseamnă: vectorii $\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$ sînt la fel orientaţi? opus orientaţi?

12. Ce este valoarea absolută a unui vector?
13. Care vectori se numesc egali?
14. Demonstraţi că din orice punct poate fi depus un vector, egal cu vectorul dat, şi numai unul singur.
15. Demonstraţi că vectorii egali sînt la fel orientaţi şi egali după valoarea absolută. Reciproc, vectorii la fel orientaţi şi egali după valoarea absolută, sînt egali.
16. Ce sînt coordonatele vectorului?
17. Demonstraţi că vectorii egali au coordonatele respective egale, iar vectorii cu coordonatele respectiv egale sînt egali.
18. Daţi definiţia adunării vectorilor.
19. Demonstraţi că pentru orice vectori $\bar{a}$ şi $\bar{b}$
$$\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}.$$
20. Demonstraţi că pentru orice trei vectori $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$
$$\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})=(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}.$$
21. Demonstraţi egalitatea vectorială $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$.
22. Demonstraţi că pentru a obţine suma vectorilor $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ din extremitatea vectorului $\bar{a}$ trebuie să depunem vectorul $\bar{b}'$, egal cu $\bar{b}$. Atunci vectorul, a cărui origine coincide cu originea vectorului $\bar{a}$, iar extremitatea — cu extremitatea vectorului $\bar{b}'$, va fi egal cu $\bar{a}+\bar{b}$.
23. Daţi definiţia diferenţei vectorilor.
24. Daţi definiţia înmulţirii vectorului cu un număr.
25. Demonstraţi că valoarea absolută a vectorului $\lambda\bar{a}$ este egală cu $|\lambda||\bar{a}|$, direcţia vectorului $\lambda\bar{a}$ pentru $\bar{a}\neq 0$ coincide cu direcţia vectorului a, dacă $\lambda>0$, şi este opusă direcţiei vectorului $\bar{a}$, dacă $\lambda<0$.
26. Care vectori se numesc coliniari?
27. Demonstraţi că vectorii $\overline{(a_1, a_2)}$ şi $\overline{(b_1, b_2)}$ sînt coliniari atunci şi numai atunci, cînd $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$.
28. Care vector se numeşte unitar?
29. Demonstraţi că orice vector $\bar{a}(a_1, a_2)$ poate fi reprezentat sub forma $\bar{a}=a_1\bar{e}_1+a_2\bar{e}_2$, unde $\bar{e}_1$ şi $\bar{e}_2$ sînt vectorii unitari ai axelor de coordonate.
30. Daţi definiţia produsului scalar al vectorilor.
31. Demonstraţi că pentru orice trei vectori $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$
$$(\bar{a}+\bar{b})\bar{c}=\bar{a}\bar{c}+\bar{b}\bar{c}.$$
32. Cum se defineşte unghiul dintre vectori?
33. Cu ce este egal unghiul dintre vectorii la fel orientaţi?
34. Demonstraţi că produsul scalar al vectorilor este egal cu produsul valorilor lor absolute prin cosinusul unghiului dintre ei.

35. Demonstrați că dacă vectorii sînt perpendiculari, produsul lor scalar este egal cu zero. Reciproc, dacă produsul scalar a doi vectori nenuli este egal cu zero, vectorii sînt perpendiculari.

EXERCIȚII

1. O translație este dată prin formulele $x'=x+1$, $y'=y-1$. În ce puncte trec la această translație punctele (0, 0), (0, 1), (0, 2)?
2. Aflați valorile pentru a și b în formulele translației $x'=x+a$, $y'=y+b$, dacă se știe că: 1) punctul (1, 2) trece în punctul (3, 4); 2) punctul (2, —3) trece în punctul (—1, 5); 3) punctul (—1, —3) trece în punctul (0, —2).
3. La o translație punctul (1, 1) trece în punctul (—1, 0). În ce punct trece originea coordonatelor?
4. Există oare o translație, la care: 1) punctul (1, 2) trece în punctul (3, 4), iar punctul (0, 1) — în punctul (—1, 0);
   2) punctul (2, —1) trece în punctul (1, 0), iar punctul (—1, 3) — în punctul (0, 4)?
5. AB și CD sînt drepte paralele. Punctele A și D sînt situate de aceeași parte a secantei BC. Demonstrați că semidreptele BA și CD sînt la fel orientate.
6. Demonstrați că semidreptele BA și CD din problema 5 sînt opus orientate, dacă punctele A și D sînt situate de părți diferite ale secantei BC.
7. Patrulaterul $ABCD$ este un paralelogram. Considerăm semidreptele AB, BA, BC, CB, CD, DC, AD, DA. Numiți perechile de semidrepte la fel orientate și opus orientate.
8. Pe o dreaptă sînt date trei puncte: A, B, C. Punctul B e situat între A și C. Printre vectorii $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BA}$ și $\overline{BC}$ numiți vectorii la fel orientați și opus orientați.
9. $ABCD$ este un paralelogram. Demonstrați egalitatea vectorilor AB și DC.
10. Demonstrați că pentru vectorii $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ și $\overline{AC}$ are loc inegalitatea $|\overline{AC}| \leqslant |\overline{AB}| + |\overline{BC}|$.
11. Demonstrați că pentru orice vectori $\bar{a}$ și $\bar{b}$ are loc inegalitatea $|\bar{a}+\bar{b}| \leqslant |\bar{a}| + |\bar{b}|$.
12. Fie date punctele $A(0, 1)$, $B(1, 0)$, $C(1, 2)$, $D(2, 1)$. Demonstrați egalitatea vectorilor $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$.
13. Sînt date trei puncte: $A(1, 1)$, $B(-1, 0)$, $C(0, 1)$. Găsiți

un astfel de punct $D(x, y)$, încît vectorii $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$ să fie egali.

14. Valoarea absolută a vectorului $\bar{a}(5, m)$ este egală cu 13. Aflați m.
15. Valoarea absolută a vectorului $\bar{b}(n, 24)$ este egală cu 25. Aflați n.
16. Ce forță trebuie aplicată pentru a ține pe loc (ca să nu alunece) un corp cu greutatea P, situat pe un plan înclinat (fig. 172)?
17. Aflați suma vectorilor: 1) $\bar{a}(1, -2)$ și $\bar{b}(2, -3)$; 2) $\bar{a}(-3, 4)$ și $\bar{b}(2, -3)$; 3) $\bar{a}(3, 1)$ și $\bar{b}(-2, -1)$; 4) $\bar{a}(-5, 4)$ și $\bar{b}(2, -2)$; 5) $\bar{a}(-1, 1)$ și $\bar{b}(2, 4)$.
18. Aflați vectorul $\bar{a}-\bar{b}$, dacă: 1) $\bar{a}(1, 4)$; $\bar{b}(1, 3)$; 2) $\bar{a}(-3, 2)$, $\bar{b}(2, -1)$; 3) $\bar{a}(5, 3)$, $\bar{b}(4, 4)$;
   4) $\bar{a}(3, 3)$, $\bar{b}(4, 2)$; 5) $\bar{a}(1, 5)$, $\bar{b}(2, 7)$.
19. Se dau vectorii $\overline{AB}$ și $\overline{AC}$ cu originea comună. Demonstrați că $\overline{AC}-\overline{AB}=\overline{BC}$.
20. Aflați valoarea absolută a vectorului $\bar{a}+\bar{b}$, dacă: 1) $\bar{a}(1, -4)$, $\bar{b}(-4, 8)$; 2) $\bar{a}(2, 5)$, $\bar{b}(4, 3)$; 3) $\bar{a}(10, 7)$, $\bar{b}(2, -2)$.
21. Aflați valoarea absolută a vectorului $\bar{a}-\bar{b}$, dacă: 1) $\bar{a}(1, -4)$, $\bar{b}(-4, 8)$; 2) $\bar{a}(-2, 7)$, $\bar{b}(4, -1)$, 3) $\bar{a}(15, 0)$, $\bar{b}(0, -8)$.
22. Sînt date punctele: $A(x_1, y_1)$ și $B(x_2, y_2)$. Demonstrați că vectorii $\overline{AB}$ și $\overline{BA}$ sînt opus orientați.
23. Demonstrați că vectorii $\bar{a}(1, 2)$ și $\bar{b}(0{,}5, 1)$ sînt la fel orientați, iar vectorii $\bar{c}(-1, 2)$ și $\bar{d}(0{,}5; -1)$ sînt opus orientați.
24. Este dat vectorul $\bar{a}(3, 4)$. Aflați vectorul $\bar{b}(b_1, b_2)$, a cărui lungime este de două ori mai mare decît lungimea vectorului $\bar{a}$ și este: 1) la fel orientat cu vectorul $\bar{a}$; 2) opus orientat cu vectorul $\bar{a}$.
25. Se dau vectorii $\bar{a}(3, 2)$ și $\bar{b}(0, -1)$. Aflați vectorul:

    1) $-2\bar{a}+4\bar{b}$; 2) $3\bar{a}-\bar{b}$; 3) $4\bar{a}+\bar{b}$.
26. Se dau vectorii $\bar{a}(3, 2)$ și $\bar{b}(0, -1)$. Aflați valoarea absolută a vectorului: 1) $-2\bar{a}+4\bar{b}$; 2) $4\bar{a}+3\bar{b}$; 3) $5\bar{a}+10\bar{b}$.
27. Aflați valoarea absolută a vectorului $3\bar{a}$, dacă: 1) $\bar{a}(3, 4)$; 2) $\bar{a}(-5; 12)$ 3) $\bar{a}(-6, -8)$.
28. Valoarea absolută a vectorului $\lambda\bar{a}$ este egală cu 5. Aflați λ, dacă: 1) $\bar{a}(-6, 8)$; 2) $\bar{a}(3, -4)$; 3) $\bar{a}(5, 12)$.
29. Se dau vectorii $\bar{a}(2, -4)$ $\bar{b}(1, 2)$, $\bar{c}(1, -2)$, $\bar{d}(-2, -4)$. Indicați perechile de vectori coliniari.
30. Care vectori din problema 29 sînt la fel orientați și ca-

re — opus orientați? Care din acești vectori au valori absolute egale?

31. Vectorii $\bar{a}(1, -1)$ și $\bar{b}(-2, m)$ sînt coliniari. Aflați cu ce este egal m.
32. Pentru ce valoare a lui n vectorii $\bar{a}(n, 1)$, $\bar{b}(4, n)$ sînt coliniari și la fel orientați?
33. Care din vectorii $\bar{a}\left(-\frac{3}{4}, \frac{4}{5}\right)$, $\bar{b}\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\bar{c}(0, -1)$, $\bar{d}\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ sînt unitari? Indicați care din ei sînt coliniari?
34. Aflați vectorul unitar, coliniar și la fel orientat cu vectorul $\bar{a}(6, 8)$.
35. Se dau vectorii $\bar{a}(1, 0)$, $\bar{b}(1, 1)$ și $\bar{c}(-1, 0)$. Aflați astfel de numere λ și μ, încît să fie adevărată egalitatea vectorială $\bar{c}=\lambda\bar{a}+\mu\bar{b}$.
36. Punctele M și N sînt respectiv mijlocurile segmentelor AB și CD. Demonstrați egalitatea vectorială: $\overline{MN}=\frac{1}{2}(\overline{AC}+\overline{BD})$.
37. $\overline{e_1}(1, 0)$ și $\overline{e_2}(0, 1)$ sînt vectori de coordonate. Cu ce sînt egale coordonatele vectorului $2\overline{e_1}-3\overline{e_2}$?
38. Cu ce sînt egali λ și μ în reprezentarea vectorului $\bar{a}(-5, 4)$:
$$\bar{a}=\lambda\overline{e_1}+\mu\overline{e_2}?$$
39. Demonstrați că pentru orice vectori $\bar{a}$ și $\bar{b}$ are loc inegalitatea $(\bar{a}\bar{b})^2\leqslant\bar{a}^2\bar{b}^2$.
40. Aflați unghiul dintre vectorii $\bar{a}(1, 2)$, $\bar{b}(1, -\frac{1}{2})$.
41. Se dau vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$. Aflați valoarea absolută a vectorului $\bar{a}+\bar{b}$, dacă se știe că valorile absolute ale vectorilor $\bar{a}$ și $\bar{b}$ sînt egale cu 1, iar unghiul dintre ei este de 60°.
42. Aflați unghiul dintre vectorii $\bar{a}$ și $\bar{a}+\bar{b}$ din problema precedentă.
43. Sînt date vîrfurile $A(1, 1)$, $B(4, 1)$, $C(4, 5)$ ale unui triunghi. Aflați cosinusurile unghiurilor triunghiului.
44. Aflați unghiurile triunghiului cu vîrfurile
$A(0, \sqrt{3})$, $B(2, \sqrt{3})$, $C\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
45. Demonstrați că vectorii $\bar{a}(m, n)$ și $\bar{b}(-n, m)$ sînt perpendiculari sau egali cu zero.
46. Se dau vectorii $\bar{a}(3, 4)$ și $\bar{b}(m, 2)$. Pentru ce valoare a lui m acești vectori sînt perpendiculari?

47. Se dau vectorii $\bar{a}(1, 0)$ și $\bar{b}(1, 1)$. Aflați un astfel de număr λ, încît vectorul $\bar{a}+\lambda\bar{b}$ să fie perpendicular pe vectorul $\bar{a}$.
48. Pentru ce valoare a lui λ vectorul $\bar{a}+\lambda\bar{b}$ în problema 47 este perpendicular pe vectorul $\bar{b}$?
49. Demonstrați că dacă $\bar{a}$ și $\bar{b}$ sînt vectori unitari necoliniari, vectorii $\bar{a}+\bar{b}$ și $\bar{a}-\bar{b}$ sînt diferiți de zero și perpendiculari.
50. Vectorii unitari $\bar{a}$ și $\bar{b}$ formează un unghi de 60°. Demonstrați că vectorul $2\bar{b}-\bar{a}$ este perpendicular pe vectorul $\bar{a}$.
51. Vectorii $\bar{a}+\bar{b}$ și $\bar{a}-\bar{b}$ sînt perpendiculari. Demonstrați că $|\bar{a}|=|\bar{b}|$.
52. Demonstrați cu ajutorul vectorilor că diagonalele unui romb sînt perpendiculare.
53. Sînt date patru puncte: $A(1, 1)$, $B(2, 3)$, $C(0, 4)$, $D(-1, 2)$. Demonstrați că patrulaterul $ABCD$ este un dreptunghi.
54. Sînt date patru puncte: $A(0, 0)$, $B(-1, 1)$, $C(0, 2)$, $D(1, 1)$. Demonstrați că patrulaterul $ABCD$ este un pătrat.
55. 1) Sînt date trei puncte: O, A, B. Punctul X împarte segmentul AB în raportul $\lambda:\mu$, considerînd de la punctul A. Exprimați vectorul $\overrightarrow{OX}$ prin vectorii $\overrightarrow{OA}=\bar{a}$ și $\overrightarrow{OB}=\bar{b}$.
2) Demonstrați că medianele unui triunghi se intersectează într-un punct, care le împarte în raportul 2 : 1, considerînd de la vîrfurile respective.

§ 11. REZOLVAREA TRIUNGHIURILOR

68. TEOREMA COSINUSURILOR

Teorema 11.1 (teorema cosinusurilor). ***Pătratul oricărei laturi a unui triunghi este egal cu suma pătratelor celorlalte două laturi minus îndoitul produs al acestor laturi prin cosinusul unghiului dintre ele.***

Demonstrație. Fie ABC un triunghi dat (fig. 175). Vom demonstra că

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A.$$

Avem egalitatea vectorială $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. De aici $\overrightarrow{BC}=$

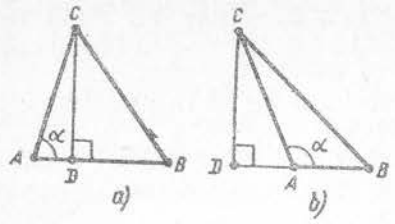


Fig. 175

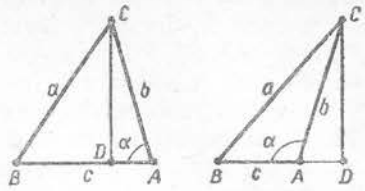


Fig. 176

$= \overline{AC} - \overline{AB}$. Ridicînd scalar la pătrat această egalitate, obținem:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{AC}.$$

De aici

$$|\overline{BC}|^2 = |\overline{AB}|^2 + |\overline{AC}|^2 - 2|\overline{AB}|\,|\overline{AC}| \cos A.$$

Teorema este demonstrată.

Observăm că produsul $|\overline{AC}| \cos A$ este egal după valoarea absolută cu proiecția AD a laturii AC pe latura AB (fig. 175, *a*) sau pe prelungirea ei (fig. 175, *b*). Semnul produsului $|\overline{AC}| \cos A$ depinde de unghiul A: „+", dacă unghiul A este ascuțit, „—", dacă unghiul A este obtuz. De aici obținem consecința: ***pătratul unei laturi a triunghiului este egal cu suma pătratelor celorlalte două laturi „±" dublul produs al uneia din aceste laturi și proiecția celeilalte laturi.*** Semnul „+" se pune atunci, cînd unghiul opus este obtuz, iar semnul „—", cînd unghiul este ascuțit.

Problemă (1). Sînt date laturile a, b, c ale unui triunghi. Aflați înălțimea triunghiului, coborîtă pe latura c.

Rezolvare. Avem: $a^2 = b^2 + c^2 \pm 2C \cdot AD$ (fig. 176). De aici $AD = \pm \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2c}$. Conform teoremei lui Pitagora

$$CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 - c^2}{2c}\right)^2}.$$

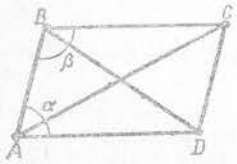


Fig. 177

Din teorema cosinusurilor rezultă că ***suma pătratelor diagonalelor unui paralelogram este egală cu suma pătratelor laturilor lui.*** Într-adevăr, fie $ABCD$ un paralelogram (fig. 177). Aplicăm teorema cosinusurilor la triunghiurile ABC și ABD și obținem:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \beta,$$
$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos \alpha.$$

Adunînd aceste egalități parte cu parte și observînd că $\cos \beta = -\cos \alpha$, $BC = AD$, $AB = CD$, obținem:

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2.$$

Ceea ce trebuia demonstrat.

69. TEOREMA SINUSURILOR

Teorema 11.2 (teorema sinusurilor). ***Laturile unui triunghi sînt proporționale cu sinusurile unghiurilor opuse.***

Demonstrație. Fie ABC un triunghi cu laturile a, b, c și unghiurile opuse α, β, γ (fig. 178). Vom demonstra că

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}.$$

Din vîrful C coborîm înălțimea CD. Din triunghiul dreptunghic ACD, dacă unghiul α este ascuțit, avem: $CD = b \sin \alpha$ (fig. 178, *a*). Dacă unghiul α este obtuz, $CD = b \sin (180° - \alpha) = b \sin \alpha$ (fig. 178, *b*). În mod analog din triunghiul BCD obținem: $CD = a \sin \beta$. Așadar, $a \sin \beta = b \sin \alpha$. De aici

$$\frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \alpha}{a}.$$

În mod analog se demonstrează egalitatea

$$\frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}.$$

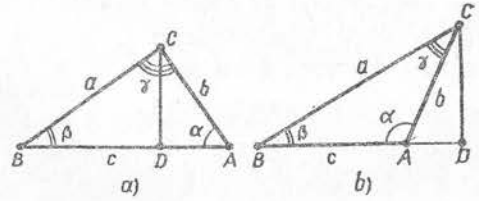


Fig. 178

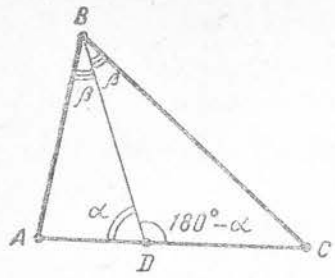


Fig. 179

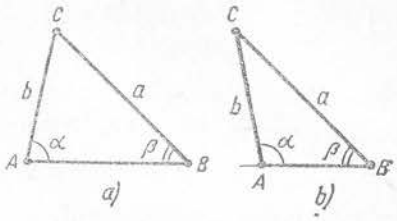


Fig. 180

Pentru aceasta trebuie să ducem înălțimea triunghiului din vîrful A. Teorema e demonstrata.

Problemă (10). Demonstrați că bisectoarea unui triunghi împarte latura opusă în segmente, proporționale cu laturile alăturate.

Rezolvare. Fie ABC un triunghi dat și BD o bisectoare a lui (fig. 179). Vom demonstra că $\frac{AD}{CD}=\frac{AB}{BC}$.

Aplicăm teorema sinusurilor la triunghiurile ABD și CBD:

$$\frac{AD}{\sin\beta}=\frac{AB}{\sin\alpha},\quad \frac{CD}{\sin\beta}=\frac{BC}{\sin(180°-\alpha)}=\frac{BC}{\sin\alpha}.$$

Dacă împărțim prima egalitate la a doua, obținem:

$$\frac{AD}{CD}=\frac{AB}{BC}.$$

Ceea ce trebuia demonstrat.

Fie a, b două laturi ale unui triunghi, iar α, β unghiurile opuse lor. Din teorema sinusurilor rezultă că dacă $\alpha>\beta$, atunci $a>b$. Reciproc, dacă $a>b$, atunci $\alpha>\beta$. Mai pe scurt, ***Într-un triunghi unghiului mai mare i se opune latura mai mare, laturii mai mari i se opune unghiul mai mare.***

Într-adevăr, dacă unghiurile α și β sînt ascuțite (fig. 180, a), pentru $\alpha>\beta$ vom avea $\sin\alpha>\sin\beta$. Însă, deoarece

$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b},$$

avem $a>b$. Dacă unghiul α este obtuz (ambele unghiuri nu

pot fi obtuze), unghiul $180°-\alpha$ este ascuțit (fig. 180, b) și este mai mare decît β, ca unghi exterior al triunghiului, care nu e megieș cu unghiul β. De aceea $\sin\alpha=\sin(180°-\alpha)>\sin\beta$. Și din nou conchidem că $a>b$. Afirmația reciprocă se demonstrează prin reducere la absurd.

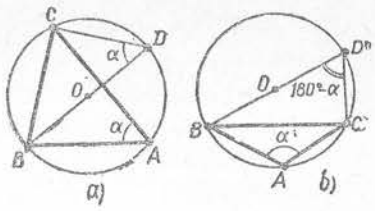


Fig. 181

Problemă (11). Demonstrați că fiecare raport

$$\frac{\sin\alpha}{a},\quad \frac{\sin\beta}{b},\quad \frac{\sin\gamma}{c}$$

din teorema sinusurilor este egal cu $\frac{1}{2R}$, unde R este raza circumferinței, circumscrise triunghiului.

Rezolvare. Ducem diametrul BD (fig. 181). Conform proprietății unghiurilor, înscrise în circumferință, unghiul de la vîrful B al triunghiului dreptunghic BCD este egal cu α, dacă punctele A și D se află de aceeași parte a dreptei BC (fig. 181, a), sau cu $180°-\alpha$, dacă ele se află de părți diferite ale dreptei BC (fig. 181, b). În primul caz $BC=BD\sin\alpha$, iar în cazul al doilea $BC=BD\sin(180°-\alpha)$. Deoarece $\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$, în orice caz avem $a=2R\sin\alpha$. Prin urmare, $\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{1}{2R}$. Ceea ce trebuia demonstrat.

70. REZOLVAREA TRIUNGHIURILOR

Rezolvarea triunghiurilor constă în aflarea laturilor și unghiurilor necunoscute ale triunghiului după unghiurile și laturile lui cunoscute. Vom nota laturile triunghiului prin a, b, c, iar unghiurile opuse lor — prin α, β, γ.

Problema 1. ***Fie date latura a și două unghiuri ale unui triunghi, de exemplu*** β ***și*** γ. ***Să se afle unghiul al treilea și celelalte două laturi.***

Procedeul de rezolvare. Deoarece suma unghiurilor unui triunghi este egală cu 180°, unghiul al treilea se exprimă prin unghiurile date. Cunoscînd o latură și ce-

le trei unghiuri, după teorema sinusurilor aflăm celelalte două laturi.

Problema II. ***Fie date două laturi ale unui triunghi, de exemplu a şi b, şi unghiul γ dintre ele. Să se afle celelalte două unghiuri şi latura a treia.***

Procedeul de rezolvare. După teorema cosinusurilor aflăm latura *c*. Acum, avînd toate cele trei laturi, după teorema cosinusurilor putem afla cosinusurile celorlaltor unghiuri şi unghiurile înseşi. Ar fi, însă, mai simplu să aplicăm teorema sinusurilor şi să aflăm sinusurile unghiurilor necunoscute. Însă în acest caz trebuie să avem în vedere că pentru valoarea dată a sinusului se obţin două unghiuri. De aceea din unghiurile obţinute trebuie să le luăm pe acelea, care satisfac relaţiile cunoscute: suma unghiurilor unui triunghi este egală cu 180°; laturii mai mari i se opune unghiul mai mare.

Problema III. ***Sînt date două laturi ale unui triunghi, de exemplu a şi b, şi unghiul opus uneia din ele, de exemplu α. Să se afle celelalte două unghiuri şi latura a treia.***

Procedeul de rezolvare. După teorema sinusurilor aflăm $\sin\beta$. Cunoscînd $\sin\beta$, aflăm două valori β_1 şi β_2 ale lui β. Alegem unul din aceste unghiuri sau pe ambele, avînd în vedere că celei mai mari dintre laturile *a* şi *b* i se opune unghiul mai mare. Cunoscînd unghiurile α şi β, aflăm unghiul $\gamma = 180° - \alpha - \beta$, apoi după teorema sinusurilor aflăm latura *c*. Această problemă, spre deosebire de primele două, poate să nu aibă soluţie, poate să aibă două soluţii.

Problema IV. ***Sînt date cele trei laturi ale unui triunghi. Să se afle unghiurile lui.***

Procedeul de rezolvare. După teorema cosinusurilor aflăm unul din unghiuri. După aceasta procedăm ca şi în problema a doua.

ÎNTREBĂRI PENTRU REPETARE

1. Formulaţi şi demonstraţi teorema cosinusurilor.
2. Demonstraţi că pătratul unei laturi a triunghiului este egal cu suma pătratelor celorlalte două laturi „±" îndoitul produs al uneia din aceste laturi şi proiecţia celeilalte laturi. De ce depinde semnul „+" sau „—"?
3. Demonstraţi că suma pătratelor diagonalelor unui paralelogram este egală cu suma pătratelor laturilor lui.
4. Demonstraţi teorema sinusurilor.
5. Demonstraţi că în orice triunghi laturii mai mari i se opune unghiul mai mare şi unghiului mai mare i se opune latura mai mare.
6. Fie date o latură şi două unghiuri ale unui triunghi. Cum se pot afla unghiul al treilea şi celelalte două laturi ale triunghiului?
7. Fie date două laturi ale unui triunghi şi unghiul dintre ele. Cum se pot afla celelalte două unghiuri şi latura a treia?
8. Fie date două laturi şi un unghi opus uneia din ele. Cum se pot afla celelalte două unghiuri şi latura a treia?
9. Fie date cele trei laturi ale unui triunghi. Cum se pot afla unghiurile lui?

EXERCIŢII

1. Sînt date laturile *a, b, c* ale unui triunghi. Aflaţi înălţimea triunghiului, coborîtă pe latura *c*.
2. Sînt date diagonalele *c* şi *d* ale unui paralelogram şi unghiul dintre ele α. Aflaţi laturile paralelogramului.
3. Sînt date laturile unui paralelogram *a* şi *b* şi unul din unghiuri α. Aflaţi diagonalele paralelogramului.
4. Fie *a, b, c* laturile unui triunghi. Demonstraţi teorema reciprocă teoremei lui Pitagora: dacă $a^2+b^2=c^2$ triunghiul este dreptunghic cu unghiul drept, opus laturii *c*.
5. Fie *a, b, c* laturile unui triunghi. Demonstraţi că dacă $a^2+b^2>c^2$, unghiul opus laturii *c* este ascuţit. Dacă $a^2+b^2<c^2$, unghiul opus laturii *c* este obtuz.
6. Două laturi ale unui triunghi sînt egale cu 20 m şi 21 m, iar sinusul unghiului dintre ele este egal cu 0,6. Aflaţi latura a treia.
7. Laturile unui triunghi sînt de 13 m, 14 m şi 15 m. Aflaţi cosinusurile unghiurilor triunghiului.
8. Sînt date laturile *a, b, c* ale unui triunghi. Aflaţi medianele m_a, m_b, m_c, duse la aceste laturi.
9. Demonstraţi că locul geometric al punctelor, suma pătratelor distanţelor cărora pînă la două puncte date este constantă, reprezintă o circumferinţă cu centrul în mijlocul segmentului, ce uneşte punctele date.
10. Demonstraţi că bisectoarea unui unghi al triunghiului

împarte latura opusă în segmente proporționale cu laturile alăturate.

11. Demonstrați că fiecare raport $\frac{\sin\alpha}{a}$, $\frac{\sin\beta}{b}$, $\frac{\sin\gamma}{c}$ din teorema sinusurilor este egal cu $\frac{1}{2R}$, unde R este raza circumferinței, circumscrise triunghiului.
12. Două laturi ale unui triunghi sînt egale cu 5 cm și 6 cm. Poate oare fi obtuz unghiul opus laturii de 5 cm?
13. În triunghiul ABC, $AB=15$ cm, $AC=10$ cm. Poate oare fi $\sin B=\frac{3}{4}$?
14. Explicați cum se poate afla distanța de la punctul A pînă la punctul inaccesibil B (fig. 182), cunoscînd distanța AC și unghiurile α și β.
15. Explicați cum se poate afla înălțimea x a clădirii (fig. 183), dacă sînt cunoscute unghiurile α, β și distanța a.
16. Din vîrful C al triunghiului ABC este dusă bisectoarea CD. Latura AC este mai mare decît latura BC. Care segment e mai mare: AD sau BD?
17. Fie ABC un triunghi, iar CD bisectoarea, dusă la latura AB. Demonstrați că dacă unghiul CAB este mai mare decît unghiul CBA, atunci AD este mai mic decît BD.
18. În triunghiul ABC $\angle A=40°$, $\angle B=60°$, $\angle C=80°$. Care din laturile triunghiului e cea mai mare și care — cea mai mică?
19. În triunghiul ABC latura $AB=5{,}1$ m, $BC=6{,}2$ m, $AC=7{,}3$ m. Care din unghiurile triunghiului e cel mai mare și care e cel mai mic?
20. Unghiul de la baza unui triunghi isoscel este mai mare

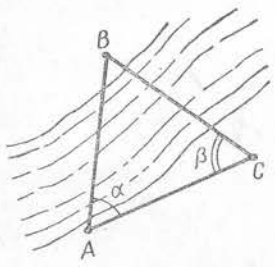


Fig. 182

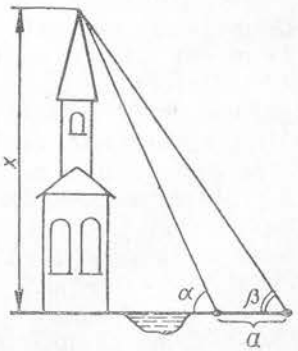


Fig. 183

decît 60°. Ce este mai mare: baza sau latura laterală a acestui triunghi?
21. În triunghiul ABC unghiul C este obtuz. Demonstrați că dacă punctul X se află pe latura AC, atunci $BX<AB$.
22. În triunghiul ABC unghiul C este obtuz. Demonstrați că dacă punctul X e situat pe latura AC, iar punctul Y — pe latura BC, atunci $XY<AB$.
23. Fie D un punct luat pe latura AB a triunghiului ABC. Demonstrați că segmentul CD e mai mic decît cel puțin una din laturile: AC sau BC.
24. Fie CD mediana, dusă la latura AB a triunghiului ABC. Demonstrați că dacă $AC>BC$, unghiul ACD este mai mic decît unghiul BCD.
25. Demonstrați că bisectoarea triunghiului nu e mai mică decît înălțimea și nu e mai mare decît mediana, duse din același vîrf.
26. Cum variază latura AB a triunghiului ABC, dacă unghiul C crește, iar laturile AC și BC rămîn constante?
27. Sînt date o latură și două unghiuri ale uni triunghi. Aflați unghiul al treilea și celelalte două laturi, dacă:

1) $a=5$, $\beta=30°$, $\alpha=45°$;
2) $a=20$, $\alpha=75°$, $\beta=60°$;
3) $a=35$, $\beta=40°$, $\alpha=120°$;
4) $b=12$, $\alpha=36°$, $\beta=25°$;
5) $c=14$, $\alpha=64°$, $\beta=48°$.

28. Sînt date două laturi ale unui triunghi și unghiul opus laturii a treia. Aflați celelalte două unghiuri și latura a treia, dacă:

1) $a=12$, $b=8$, $\alpha=60°$;
2) $a=7$, $b=23$, $\alpha=130°$;
3) $b=9$, $c=17$, $\alpha=95°$;
4) $b=14$, $c=10$, $\alpha=145°$;
5) $a=32$, $c=23$, $\beta=152°$;
6) $a=24$, $c=18$, $\beta=15°$.

29. Într-un triunghi sînt date două laturi a, b și unghiul α opus laturii a. Aflați celelalte unghiuri și latura a treia a triunghiului, dacă:

1) $a=12$, $b=5$, $\alpha=120°$;
2) $a=27$, $b=9$, $\alpha=138°$;
3) $a=34$, $b=12$, $\alpha=164°$;
4) $a=2$, $b=4$, $\alpha=60°$;
5) $a=6$, $b=8$, $\alpha=30°$.

30. Sînt date toate cele trei laturi ale unui triunghi. Aflaţi unghiurile lui, dacă:

1) $a=2$, $b=3$, $c=4$;
2) $a=7$, $b=2$, $c=8$;
3) $a=4$, $b=5$, $c=7$;
4) $a=15$, $b=24$, $c=18$;
5) $a=23$, $b=17$, $c=39$;
6) $a=55$, $b=21$, $c=38$.

§ 12. POLIGOANE

71. LINIA FRÎNTĂ

Se numeşte *linie frîntă* $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ figura, care constă din punctele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ şi din segmentele, ce le uneşte A_1A_2, A_2A_3, $\ldots$, $A_{n-1}A_n$. Punctele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se numesc *vîrfuri* ale liniei frînte, iar A_1A_2, A_2A_3, $\ldots$, $A_{n-1}A_n$ — *segmente* ale liniei frînte. Linia frîntă, care nu are autointersecţii, se numeşte *simplă*. În figura 184, *a* este reprezentată o linie frîntă simplă, iar în figura 184, *b* — o linie frîntă cu autointersecţie (în punctul *B*). Suma lungimilor segmentelor liniei frînte se numeşte *lungimea* ei.

Teorema 12.1. ***Lungimea liniei frînte nu este mai mică decît lungimea segmentului, care uneşte extremităţile ei.***

Demonstraţie. Fie $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ o linie frîntă dată. Segmentele A_1A_2 şi A_2A_3 ale acestei linii frînte le înlocuim cu un singur segment A_1A_3. Obţinem linia frîntă $A_1A_3A_4 \ldots A_n$. Conform inegalităţii triunghiului, lungimea ei nu este mai mare decît lungimea liniei frînte iniţiale. Înlocuind în mod analog segmentele A_1A_3 şi A_3A_4 cu segmentul A_1A_4, trecem la linia frîntă $A_1A_4A_5 \ldots A_n$, lungimea căreia nu e mai mare decît lungimea celei iniţiale. Etc. În cele din urmă vom ajunge la segmentul A_1A_n, care uneşte extremităţile liniei frînte date. De aici rezultă că linia frîntă iniţială a avut o lungime nu mai mică decît lungimea segmentului A_1A_n. Teorema e demonstrată.

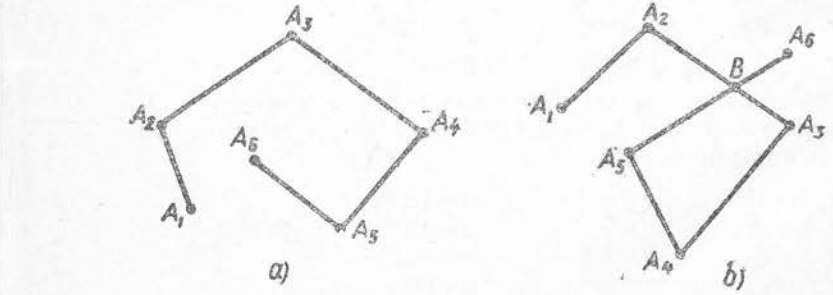


Fig. 184

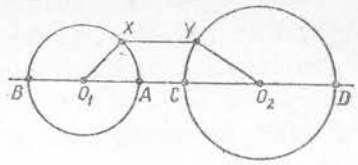


Fig. 185

Problemă (1). Sînt date două circumferinţe cu razele R_1 şi R_2 şi cu distanţa dintre centre $d>R_1+R_2$. Cu ce sînt egale cea mai mare şi cea mai mică distanţă dintre punctele X şi Y ale acestor circumferinţe?

Rezolvare. Conform teoremei 12.1, pentru linia frîntă O_1XYO_2 avem $O_1O_2 \leqslant O_1X+XY+YO_2$ (fig. 185). Deci, $d \leqslant R_1+XY+R_2$. De aici $XY \geqslant d-R_1-R_2$. Deoarece $AC=d-R_1-R_2$, cea mai mică distanţă dintre punctele circumferinţelor este egală cu $d-R_1-R_2$.

Conform aceleiaşi teoreme pentru linia frîntă XO_1O_2Y avem $XY \leqslant R_1+d+R_2$. Deoarece $BD=d+R_1+R_2$, cea mai mare distanţă dintre punctele circumferinţelor este egală cu $d+R_1+R_2$.

72. POLIGOANE CONVEXE

O linie frîntă se numeşte *închisă*, dacă extremităţile ei coincid. O linie frîntă simplă şi închisă se numeşte *poligon*, dacă segmentele ei vecine nu sînt situate pe aceeaşi dreaptă (fig. 186). Vîrfurile liniei frînte se numesc *vîrfuri ale poligonului*, iar segmentele liniei frînte — *laturi ale po-*

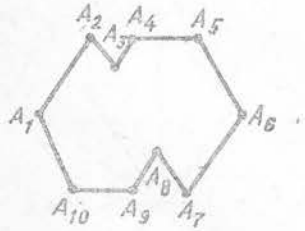


Fig. 186

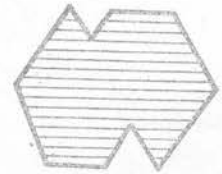


Fig. 187

ligonului. Segmentele, care unesc vîrfurile neînvecinate ale poligonului, se numesc *diagonale.* Poligonul cu n vîrfuri, deci, şi cu n laturi, se numeşte poligon cu n laturi sau n-unghi.

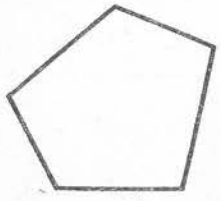
Figura, ce constă dintr-un poligon şi partea finită a planului, mărginită de acest poligon, se numeşte *poligon plan* (fig. 187).

Un poligon se numeşte *convex,* dacă el este situat în acelaşi semiplan în raport cu orice dreaptă, ce conţine o latură a lui. În figura 188, *a,* este reprezentat un poligon convex, iar în figura 188, *b* — un poligon neconvex. *Unghi* de la vîrful dat al unui poligon convex se numeşte unghiul, format de laturile lui, care se întîlnesc în acest vîrf.

Teorema 12.2. ***Suma unghiurilor unui poligon convex cu n laturi este egală cu*** $180°(n-2)$.

Demonstraţie. Fie P: $A_1A_2 \ldots A_n$ un poligon convex dat (fig. 189). Ducem diagonala A_1A_3. Obţinem triunghiul $A_1A_2A_3$ şi poligonul cu $n-1$ vîrfuri P_1: $A_1A_3 \ldots A_n$. Unghiurile de la vîrfurile A_1 şi A_3 ale poligonului P sînt egale cu suma unghiurilor poligonului P_1 şi ale triunghiului $A_1A_2A_3$ de la aceste vîrfuri. De aici rezultă că suma unghiurilor poligonului P este egală cu suma unghiurilor poligonului P_1 plus suma unghiurilor triunghiului $A_1A_2A_3$, adică plus 180°. Mai departe prin acelaşi procedeu ajungem la concluzia că suma unghiurilor poligonului P_1 este egală cu suma unghiurilor poligonului P_2: $A_1A_4 \ldots A_n$ plus 180°. Deci, suma unghiurilor poligonului P este egală cu suma unghiurilor poligonului P_2 plus $180°\cdot 2$.

Continuînd în acelaşi mod, la pasul $(n-3)$ vom obţine triunghiul $A_1A_{n-1}A_n$. Suma unghiurilor lui este egală cu



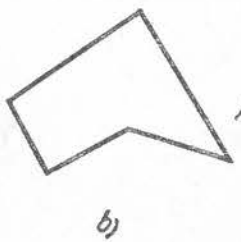


Fig. 188

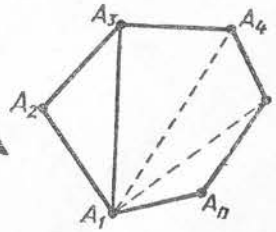


Fig. 189

180°. Astfel, suma unghiurilor poligonului P este egală cu $180°(n-3)+180°=180°(n-2)$. Teorema este demonstrată.

Unghi exterior al poligonului convex de la vîrful dat se numeşte unghiul, megieş cu unghiul interior al poligonului de la acest vîrf.

Problemă (9). Cu ce este egală suma unghiurilor exterioare ale unui poligon convex cu n laturi, luate cîte unul la fiecare vîrf?

Rezolvare. Suma unghiului interior al poligonului cu unghiul exterior megieş cu el este egală cu 180°. De aceea suma tuturor unghiurilor interioare şi celor exterioare este egală cu $180°\cdot n$. Dar suma tuturor unghiurilor interioare este egală cu $180°\cdot(n-2)$ (vezi teorema 12.2). Deci, suma unghiurilor exterioare, luate cîte unul la fiecare vîrf, este egală cu $180°n-180°(n-2)=360°$.

73. POLIGOANE REGULATE

Un poligon convex se numeşte *regulat,* dacă toate laturile lui sînt egale şi toate unghiurile lui sînt egale.

Poligonul se numeşte *înscris* într-o circumferinţă, dacă toate vîrfurile lui sînt situate pe această circumferinţă. Poligonul se numeşte *circumscris* unei circumferinţe, dacă toate laturile lui sînt tangente la această circumferinţă.

Teorema 12.3. ***Orice poligon convex regulat este înscris într-o circumferinţă şi este circumscris unei circumferinţe.***

Demonstraţie. Fie A şi B două vîrfuri vecine ale unui poligon (fig. 190). Ducem bisectoarele unghiurilor poligonului din vîrfurile A şi B. Fie O punctul lor de intersecţie. Triunghiul AOB este isoscel cu baza AB şi unghiurile de la bază egale cu $\frac{\alpha}{2}$, unde α este unghiul poligonului. Unim punctul O cu vîrful C, vecin cu B. Triunghiurile ABO şi CBO sînt egale conform primului criteriu de

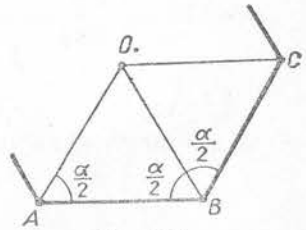


Fig. 190

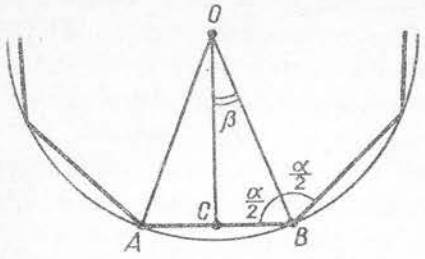


Fig. 191

egalitate a triunghiurilor. Ele au latura OB comună, laturile AB şi BC sînt egale ca laturi ale poligonului, iar unghiurile de la vîrful B sînt egale cu $\frac{\alpha}{2}$. Din egalitatea triunghiurilor rezultă că triunghiul OBC este isoscel, avînd unghiul de la vîrful C egal cu $\frac{\alpha}{2}$, adică CD este bisectoarea unghiului C.

Acum unim punctul O cu vîrful D, vecin cu C, şi demonstrăm, că triunghiul COD este isoscel şi DO este bisectoarea unghiului D al poligonului. Etc. Ca rezultat obţinem că fiecare triunghi, care are drept una din laturi latura poligonului, iar drept vîrf opus — punctul O, este isoscel. Toate aceste triunghiuri au laturi laterale egale. De aici rezultă că toate vîrfurile poligonului se află pe circumferinţa cu centrul O şi cu raza, egală cu laturile laterale ale triunghiurilor, iar toate laturile poligonului sînt tangente la circumferinţa cu centrul O şi raza, egală cu înălţimile triunghiurilor, duse din vîrful O. Teorema este demonstrată.

Să aflăm raza R a circumferinţei circumscrise şi raza r a circumferinţei înscrise pentru un poligon regulat cu n laturi egale cu a (fig. 191). Avem:

$$\beta = 90° - \frac{\alpha}{2} = 90° - \frac{(n-2)180°}{2n} = \frac{180°}{n};$$

$$R = OB = \frac{CB}{\sin\beta} = \frac{a}{2\sin\frac{180°}{n}}; \quad r = OC = \frac{CB}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{180°}{n}}.$$

Pentru triunghiul regulat (echilateral) $n=3$, $\frac{180°}{3}=60°$,

$$R = \frac{a}{2\sin 60°} = \frac{a}{\sqrt{3}}; \quad r = \frac{a}{2\operatorname{tg}60°} = \frac{a}{2\sqrt{3}}.$$

Pentru patrulaterul regulat (pentru pătrat) $n=4$, $\frac{180°}{4}=45°$,

$$R = \frac{a}{2\sin 45°} = \frac{a}{\sqrt{2}}; \quad r = \frac{a}{2\operatorname{tg}45°} = \frac{a}{2}.$$

Pentru hexagonul regulat $n=6$, $\frac{180°}{6}=30°$,

$$R = \frac{a}{2\sin 30°} = a; \quad r = \frac{a}{2\operatorname{tg}30°} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

74. ASEMĂNAREA POLIGOANELOR CONVEXE REGULATE

Teorema 12.4. ***Poligoanele convexe regulate cu n laturi sînt asemenea. În particular, dacă laturile lor sînt egale, poligoanele sînt egale.***

Demonstraţie. Să demonstrăm mai întîi afirmaţia a doua. Fie P_1: $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ şi P_2: $B_1B_2B_3 \ldots B_n$ două poligoane regulate convexe cu n laturi egale (fig. 192) Vom demonstra că ele sînt egale, adică cu ajutorul unei mişcări ele pot fi suprapuse astfel încît coincid. Triunghiurile $A_1A_2A_3$ şi $B_1B_2B_3$ sînt egale după primul criteriu de egalitate a triunghiurilor: în aceste triunghiuri $A_1A_2=B_1B_2$, $A_2A_3=B_2B_3$ şi $\angle A_1A_2A_3=\angle B_1B_2B_3$. Supunem poligonul P_1 unei mişcări, prin care vîrfurile A_1, A_2, A_3 trec respectiv în vîrfurile B_1, B_2, B_3. După cum ştim o asemenea mişcare

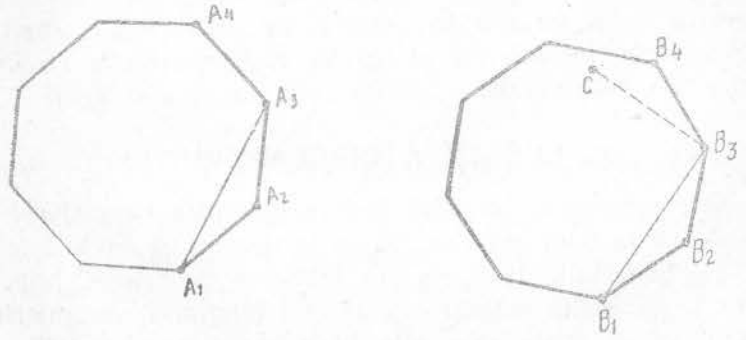


Fig. 192

există. În acest caz vîrful A_4 va trece într-un punct C. Deoarece mișcarea păstrează unghiurile și distanțele, $\angle B_2B_3C = \angle B_3B_3B_4$ și $B_3C = B_3B_4$. Atunci punctul C coincide cu punctul B_4. Astfel, la mișcarea dată vîrful A_4 trece în vîrful B_4. Mai departe în mod analog conchidem că vîrful A_5 trece în vîrful B_5 etc. Cu alte cuvinte, cu ajutorul unei mișcări poligonul P_1 se transformă în poligonul P_2 și, deci, ele sînt egale.

Pentru a demonstra prima afirmație a teoremei, supunem mai întîi poligonul P_1 unei transformări de asemănare, de exemplu unei omotetii, cu coeficientul de asemănare $k = B_1B_2/A_1A_2$. Ca rezultat obținem poligonul cu n laturi P', ale cărui laturi sînt egale cu laturile poligonului P_2. Conform celor demonstrate, poligonul P' se transferă în poligonul P_2 cu ajutorul unei mișcări. Deci, poligonul P_1 se transferă în poligonul P_2 prin efectuarea succesivă a unei transformări de asemănare și a unei mișcări, iar aceasta este de asemenea o transformare de asemănare. Teorema este demonstrată.

Coeficientul de asemănare a figurilor asemenea este egal cu raportul dimensiunilor liniare corespunzătoare ale acestor figuri. În cazul poligoanelor convexe regulate cu n laturi, astfel de dimensiuni liniare sînt lungimile laturilor, razele circumferințelor înscrise și ale celor circumscrise. De aici rezultă că raportul laturilor poligoanelor regulate cu n laturi este egal cu raportul razelor circumferințelor înscrise și cu raportul razelor circumferințelor circumscrise. Însă, deoarece și *perimetrele poligoanelor cu n laturi se raportă ca și laturile lor, raporturile perimetrelor, razelor circumferințelor înscrise și razelor circumferințelor circumscise ale poligoanelor regulate cu n laturi sînt egale.*

75. LUNGIMEA CIRCUMFERINȚEI

O reprezentare intuitivă despre lungimea circumferinței se obține în felul următor. Să ne imaginăm un fir în formă de circumferință. Îl tăiem și-l întindem de capete. Lungimea segmentului obținut este tocmai lungimea circumferinței. Cum se poate oare afla lungimea circumferinței, cu-

noscînd raza ei? Din considerențe intuitive e clar că lungimea unei circumferințe diferă oricît de puțin de perimetrul poligonului convex înscris în ea cu laturile destul de mici. Bazîndu-ne pe aceasta, vom demonstra unele proprietăți ale lungimii circumferinței.

Teorema 12.5. ***Raportul lungimii unei circumferințe către diametrul ei nu depinde de circumferință, adică este unul și același pentru orice două circumferințe.***

Demonstrație. Luăm două circumferințe oarecare. Fie R_1 și R_2 razele, iar l_1 și l_2 lungimile circumferințelor. Presupunem că afirmația teoremei nu este adevărată și de exemplu $\frac{l_1}{2R_1} \neq \frac{l_2}{2R_2}$, de exemplu

$$\frac{l_1}{2R_1} < \frac{l_2}{2R_2}. \qquad (*)$$

Înscriem în circumferințele noastre poligoane convexe regulate cu un număr mare de laturi n. Dacă n este foarte mare, lungimile circumferințelor noastre se vor deosebi foarte puțin de perimetrele p_1 și p_2 ale poligoanelor înscrise. De aceea inegalitatea (*) nu-și va pierde sensul, dacă în loc de l_1 și l_2 vom pune în ea p_1 și p_2:

$$\frac{p_1}{2R_1} < \frac{p_2}{2R_2}. \qquad (**)$$

Însă, după cum știm, perimetrele poligoanelor regulate cu n laturi se raportă ca razele circumferințelor circumscrise:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{R_1}{R_2}.$$

De aici $\frac{p_1}{R_1} = \frac{p_2}{R_2}$. Dar aceasta contrazice inegalitatea (**). Teorema este demonstrată.

Raportul lungimii circumferinței către diametru se notează, de obicei, prin litera grecească π (se citește „pi"):

$$\frac{l}{2R} = \pi.$$

Numărul π este irațional. Valoarea aproximativă a lui

$$\pi \approx 3{,}1416.$$

Așadar, ***lungimea circumferinței se calculează din formula*** $l = 2\pi R$.

76. UNGHI LA CENTRU ȘI ARC DE CIRCUMFERINȚĂ

Unghiul împarte planul în două părți. Fiecare din aceste părți se numește *unghi plan*. În figura 193 este haşurat unul din unghiurile plane cu laturile a și b. Unghiurile plane, care au laturile comune, se numesc *complementare*.

Dacă unghiul plan este o parte a unui semiplan, atunci măsura în grade a acestui unghi se numește măsura în grade a unghiului obișnuit cu aceleași laturi. Dacă un unghi plan conține un semiplan, măsura lui în grade este egală cu 360°—α, unde α este măsura în grade a unghiului plan complementar.

Unghi la centru într-o circumferință se numește unghiul plan cu vîrful în centrul ei. Partea circumferinței, situată în interiorul unui unghi plan, se numește *arc de circumferință*, corespunzător acestui unghi la centru (fig. 194). Măsură în grade a unui arc de circumferință se numește măsura în grade a unghiului la centru corespunzător.

Să aflăm lungimea arcului de circumferință, care corespunde unghiului la centru de $n°$. Unghiului întins îi corespunde lungimea semicircumferinței πR. Prin urmare, unghiului de $n°$ îi corespunde arcul $\frac{\pi R}{180}$, iar unghiului de $n°$ îi corespunde arcul

$$l = \frac{\pi R}{180} n.$$

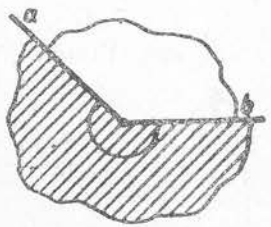


Fig. 193

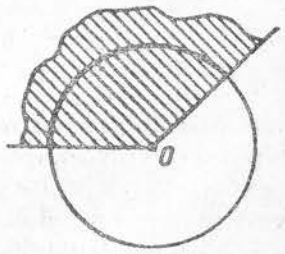


Fig. 194

Se numește *măsură în radiani* a unui unghi raportul lungimii arcului corespunzător către raza circumferinței. Din formula pentru lungimea unui arc de circumferință rezultă că

$$\frac{l}{R} = \frac{\pi}{180} n,$$

adică *măsura în radiani a unui unghi se obține din măsura în grade, înmulțită cu* $\frac{\pi}{180°}$. În particular, măsura în radiani a unghiului de 180° este egală cu π, măsura în radiani a unghiului drept este egală cu $\frac{\pi}{2}$.

Drept unitate de măsură în radiani a unghiurilor este *radianul*. Unghiul de un radian este unghiul, la care lungimea arcului este egală cu raza. Măsura în grade a unui unghi de un radian este egală cu $\frac{180°}{\pi} \approx 57°$.

ÎNTREBĂRI PENTRU REPETARE

1. Ce este linia frîntă, lungimea liniei frînte?
2. Demonstrați că lungimea liniei frînte nu este mai mică decît lungimea segmentului, care unește extremitățile ei.
3. Ce este poligonul, poligonul convex?
4. Ce este unghi al unui poligon convex de la vîrful dat?
5. Ce este unghi exterior al unui poligon convex?
6. Deduceți formula pentru suma unghiurilor unui poligon convex.
7. Demonstrați că poligonul regulat este înscris într-o circumferință și circumscris unei circumferințe.
8. Deduceți formuleie pentru razele circumferințelor înscrisă și circumscrisă unui poligon regulat cu n laturi.
9. Aflați razele circumferințelor înscrisă și circumscrisă pentru un triunghi, un patrulater (pătrat), un hexagon regulat.
10. Demonstrați că poligoanele regulate cu n laturi sînt

asemenea. În particular, dacă laturile lor sînt egale atunci şi poligoanele-s egale.

1. Demonstraţi că raportul lungimii unei circumferinţe către diametrul ei nu depinde de circumferinţă, adică el este unul şi acelaşi pentru toate circumferinţele.
12. După ce formulă se calculează lungimea circumferinţei?
13. Ce este unghiul plan?
14. Ce este unghiul la centru?
15. Ce este arc de circumferinţă, care corespunde unghiului la centru dat?
16. După ce formulă se calculează lungimea arcului de circumferinţă?
17. Ce este măsura în radiani a unui unghi?
18. Cu ce sînt egale măsurile în radiani ale unghiurilor de 180° şi 90°?

EXERCIŢII

1. Sînt date două circumferinţe cu razele R_1 şi R_2 şi cu distanţa dintre centre $d>R_1+R_2$. Cu ce sînt egale cea mai mare şi cea mai mică distanţă dintre punctele X şi Y ale acestor circumferinţe?
2. Rezolvaţi problema 1 cu condiţia că $d<R_1-R_2$.
3. Demonstraţi că dacă vîrfurile unei linii frînte nu sînt situate pe aceeaşi dreaptă, lungimea liniei frînte este mai mare decît lungimea segmentului, care uneşte extremităţile ei.
4. Demonstraţi că distanţa dintre orice două vîrfuri ale unei linii frînte închise nu depăşeşte o jumătate din lungimea liniei frînte.
5. Demonstraţi că lungimea fiecărui segment al unei linii frînte închise nu depăşeşte suma lungimilor celorlalte segmente.
6. Pot oare segmentele unei linii frînte închise să fie de lungimea de 1 m, 2 m, 3 m, 4 m, 11 m? Argumentaţi răspunsul.
7. Demonstraţi că dacă extremităţile unei linii frînte sînt situate pe părţi diferite ale unei drepte date, ea intersectează această dreaptă.
8. Cîte diagonale are un poligon cu n laturi?
9. Cu ce este egală suma unghiurilor exterioare ale unui poligon convex cu n laturi, luate cîte unul la fiecare vîrf?
10. Unghiurile unui patrulater convex sînt proporţionale cu numerele 1, 2, 3, 4. Aflaţi-le.

11. Cîte laturi are poligonul regulat, dacă fiecare unghi interior al lui este egal cu: 1) 135°; 2) 150°?
12. Cîte laturi are poligonul regulat, dacă fiecare unghi exterior al lui este egal cu: 1) 36°; 2) 24°?
13. Demonstraţi că vîrfurile unui poligon regulat cu $2n$ laturi, luate peste unul, sînt vîrfurile unui poligon regulat cu n laturi.
14. Demonstraţi că mijlocurile laturilor unui poligon regulat cu n laturi sînt vîrfurile altui poligon regulat cu n laturi.
15. Demonstraţi că centrul circumferinţei circumscrise unui poligon regulat cu un număr par de laturi, este centrul de simetrie al acestui poligon.
16. Demonstraţi că dreapta care trece prin centrul circumferinţei, circumscrise unui poligon regulat, şi printr-un vîrf al lui, este axă de simetrie a acestui poligon.
17. Demonstraţi afirmaţia: coarda, care este perpendiculară pe rază şi trece prin mijlocul ei, este egală cu latura triunghiului regulat înscris.
18. Demonstraţi afirmaţia: raza circumferinţei înscrise într-un triunghi regulat este de două ori mai mică decît raza circumferinţei circumscrise.
19. Latura unui triunghi regulat, înscris într-o circumferinţă, este egală cu a. Aflaţi latura pătratului, înscris în această circumferinţă.
20. Într-o circumferinţă cu raza de 4 dm este înscris un triunghi regulat, pe latura căruia este construit un pătrat. Aflaţi raza circumferinţei, circumscrise pătratului.
21. Capătul unui ax cu diametrul de 4 cm este prelucrat sub formă de pătrat. Determinaţi cea mai mare dimensiune, pe care o poate avea latura pătratului.
22. Capătul unui şurub are formă triedrică regulată. Care este lăţimea cea mai mare, pe care o poate avea fiecare faţă, dacă partea cilindrică a şurubului are diametrul de 2 cm?
23. Demonstraţi că latura unui octogon regulat se calculează după formula $a_8=R\sqrt{2-\sqrt{2}}$, unde R este raza circumferinţei circumscrise.
24. Demonstraţi că latura unui dodecagon regulat se calculează după formula $a_{12}=\sqrt{2-\sqrt{3}}$, unde R este raza circumferinţei circumscrise.
25. Aflaţi latura unui pentagon regulat şi latura unui decagon regulat, înscrise într-o circumferinţă de rază R.
26. Latura unui poligon regulat este egală cu a, iar raza

circumferinței circumscrise este R. Aflați raza circumferinței înscrise.

27. Latura unui poligon regulat este egală cu a, iar raza circumferinței înscrise cu r. Aflați raza circumferinței circumscrise.
28. Exprimați latura b a unui poligon regulat circumscris prin raza R a circumferinței și latura a a poligonului regulat înscris cu același număr de laturi.
29. Exprimați latura a a unui poligon regulat înscris prin raza R a circumferinței și latura b a poligonului regulat circumscris cu același număr de laturi.
30. Înscrieți în circumferință un dodecagon regulat.
31. Circumscrieți unei circumferințe un octogon regulat.
32. Calculați lungimea unei circumferințe, dacă raza este egală cu: 1) 10 m; 2) 15 m.
33. Cu cît se va schimba lungimea unei circumferințe, dacă raza se va schimba cu 1 mm?
34. Aflați raportul dintre perimetrul unui octogon regulat înscris și diametru și comparați-l cu valoarea aproximativă a lui π.
35. Rezolvați problema 34 pentru dodecagonul regulat.
36. Aflați raza globului pămîntesc, dacă se știe că 1 metru constituie a 40-a milionime din lungimea ecuatorului.
37. Cu cît s-ar lungi ecuatorul pămîntului, dacă raza globului pămîntesc s-ar mări cu 1 cm?
38. În interiorul unei circumferințe de rază R sînt situate n circumferințe egale, tangente între ele și tangente la circumferința dată. Aflați raza acestor circumferințe, dacă numărul lor n este egal cu: 1) 3; 2) 4; 3) 6.
39. Rezolvați problema precedentă, dacă circumferințele sînt situate în exteriorul circumferinței date.
40. O roată de transmisie are în diametru 1,4 m și efectuează 80 de rotații pe minut. Aflați viteza unui punct situat pe circumferința roții.
41. Aflați unghiurile plane complementare, știind că:
    1) unul din ele e de 5 ori mai mare decît celălalt;
    2) unul din ele e cu 100° mai mare decît celălalt;
    3) diferența lor este egală cu 20°.
42. Cîte grade are unghiul la centru, dacă arcul, ce-i corespunde, este egal cu:

    1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $\frac{1}{5}$; 4) $\frac{1}{6}$; 5) $\frac{2}{3}$; 6) $\frac{3}{4}$ de circumferință?

43. Ce unghi formează razele Pămîntului, duse în două

puncte pe suprafața lui, distanța dintre care este egală cu 1 km? Raza Pămîntului este egală cu 6370 km.

44. Fiind dată raza $R=1$ m, aflați lungimea arcului, care corespunde unghiului la centru de: 1) 45°; 2) 30°; 3) 120°; 4) 40°45′; 5) 60°30′; 6) 150°36′.
45. Fiind dată coarda a, aflați lungimea arcului ei, dacă el corespunde unghiului la centru de: 1) 60°; 2) 90°; 3) 120°.
46. Lungimea unui arc este egală cu l. Aflați coarda lui, dacă arcul conține: 1) 60°; 2) 90°; 3) 120°.
47. Aflați măsura în radiani a unghiurilor de: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°.

§ 13. ARIILE FIGURILOR

77. NOȚIUNE DE ARIE

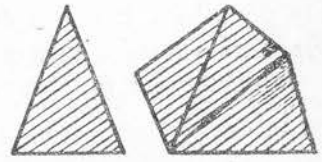
Sînt frecvente expresiile: aria locuinței este de atîți sau atîți metri pătrați, aria unui lot de pămînt este de atîtea sau atîtea hectare, aria suprafeței unei țări este de atîți kilometri pătrați. Ce este totuși arie și cum se poate afla ea? Vom analiza mai întîi figurile simple. O figură se numește *simplă*, dacă ea poate fi descompusă într-un număr finit de triunghiuri. Prin triunghi vom înțelege însă orice domeniu triunghiular, adică partea finită a unui plan, mărginită de un triunghi (fig. 195, *a*). Drept exemplu de figură simplă reprezintă poligonul convex plan. Diagonalele, duse dintr-un vîrf al lui, îl împart în triunghiuri (fig. 195, *b*). Dăm definiția noțiunii de arie a unei figuri simple.

Pentru figurile simple *aria este o mărime pozitivă, a cărei valoare numerică posedă următoarele proprietăți:*

1) *Figurile egale au arii egale.*

2) *Dacă o figură este împărțită în părți și aceste părți sînt figuri simple, aria figurii date este egală cu suma ariilor acestor părți.*

3) *Aria pătratului, latura căruia este egală cu unitatea de măsură, este egală cu unu.*



a) *b)*

Fig. 195

Dacă laturile pătratului, despre care se vorbeşte în definiţie, sînt de cîte 1 m, aria se exprimă în metri pătraţi (m^2). Dacă latura pătratului este de 100 m, aria se exprimă în hectare Dacă latura pătratului este de 1 km, aria se exprimă în kilometri pătraţi etc.

78. ARIA DREPTUNGHIULUI

Să aflăm aria unui dreptunghi. În figura 196 sînt reprezentate un pătrat, considerat drept unitate de măsură a ariei, şi un dreptunghi, aria căruia trebuie măsurată. Drept unitate de lungime serveşte latura pătratului.

Vom analiza pentru început cazul, cînd lungimile a şi b ale laturilor dreptunghiului se exprimă prin fracţii zecimale finite, iar numărul semnelor zecimale de după virgulă nu depăşeşte n.

Împărţim laturile pătratului în 10 părţi egale şi prin punctele de diviziune ducem drepte paralele cu laturile lui. În acest caz pătratul se va descompune în $10^n \cdot 10^n$ pătrate mici. În figura 196 latura pătratului este împărţită în 10 părţi egale. Numărul de pătrate mici este egal cu $10 \cdot 10 = 100$.

Aflăm aria unui pătrat mic. Una din proprietăţile ariei ne permite să afirmăm, că aria pătratului mare este egală cu suma ariilor pătratelor mici. Deoarece aria pătratului mare este egală cu unitatea, iar numărul pătratelor mici este egal cu 10^{2n}, aria unui pătrat mic este egală cu $\frac{1}{10^{2n}}$.

Întrucît $a\ \frac{1}{10^n} = a \cdot 10^n$ şi $b: \frac{1}{10^n} = b \cdot 10^n$ sînt numere întregi, laturile dreptunghiului pot fi împărţite într-un număr întreg de părţi, egale cu $\frac{1}{10^n}$. Pe latura a vor fi $a \cdot 10^n$ părţi, iar pe latura b vor fi $b \cdot 10^n$ părţi. Prin punctele de diviziune ale laturilor ducem drepte paralele cu laturile dreptunghiului. Atunci dreptunghiul se va împărţi în pătrate mici cu latura $\frac{1}{10^n}$.

Numărul lor va fi egal cu $a \cdot 10^n \cdot b \cdot 10^n$. Aria dreptunghiului este egală cu suma ariilor acestor pătrate mici. Deoarece

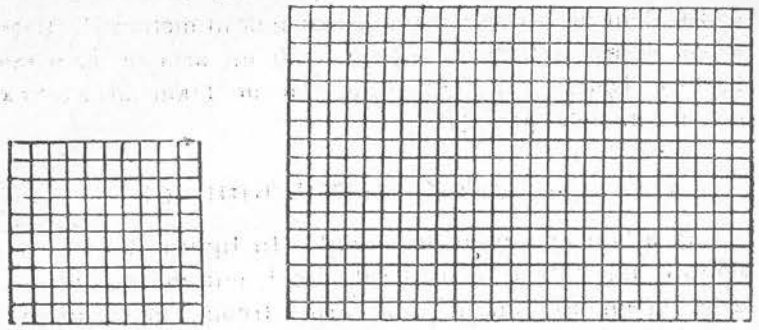


Fig. 196

aria pătratului mic este egală cu $\frac{1}{10^{2n}}$, iar numărul lor este egal cu $ab \cdot 10^{2n}$, aria dreptunghiului este egală cu $ab \cdot 10^{2n} \times \frac{1}{10^{2n}} = ab$.

Considerăm acum cazul, cînd cel puţin una din laturile a şi b ale dreptunghiului se exprimă printr-o fracţie zecimală infinită. Notăm prin a_1 şi a_2 valorile aproximative prin lipsă şi prin adaos ale numărului a cu precizie de pînă la n semne zecimale. Valorile aproximative ale numărului b cu aceeaşi precizie le notăm prin b_1 şi b_2. Dreptunghiul cu laturile a_1 şi b_1 are o arie mai mică decît dreptunghiul dat, deoarece el poate fi situat în interiorul acestuia. Dreptunghiul cu laturile a_2 şi b_2 are o arie mai mare decît dreptunghiul dat, deoarece acesta poate fi situat în interiorul lui. Conform celor demonstrate, aria dreptunghiului cu laturile a_1 şi b_1 este egală cu a_1b_1, iar aria dreptunghiului cu laturile a_2 şi b_2 este egală cu a_2b_2. Aşadar, aria S a dreptunghiului dat este cuprinsă între a_1b_1 şi a_2b_2. Deoarece a_1b_1 şi a_2b_2 reprezintă valorile aproximative ale produsului ab cu orice precizie dinainte dată, dacă n e destul de mare, $S = ab$ Aşadar, ***aria unui dreptunghi se calculează după formula*** $S = ab$.

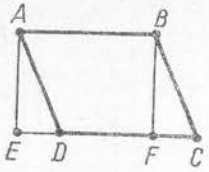


Fig. 197

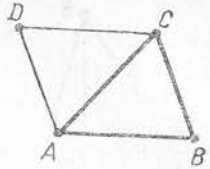


Fig. 198

79. ARIILE FIGURILOR SIMPLE

Să aflăm aria unui paralelogram. Fie *ABCD* un paralelogram dat (fig. 197). Dacă el nu este un dreptunghi, unul din unghiurile lui *A* sau *B*, este ascuțit. Admitem că unghiul *A* este ascuțit (fig. 197). Din vîrful *A* coborîm perpendiculara *AE* pe dreapta *CD*. Aria trapezului *ABCE* este egală cu suma ariilor paralelogramului *ABCD* și a triunghiului *ADE*.

Din vîrful *B* coborîm perpendiculara *BF* pe dreapta *CD*. Atunci aria trapezului *ABCE* este egală cu suma ariilor dreptunghiului *ABFE* și a triunghiului *BCF*. Triunghiurile dreptunghice *ADE* și *BCF* sînt egale, și deci, au ariile egale. De aici rezultă că aria paralelogramului *ABCD* este egală cu aria dreptunghiului *ABFE*, adică este egală cu $AB \cdot BF$. Segmentul *BF* se numește *înălțimea* paralelogramului, corespunzătoare laturilor *AB* și *CD*.

Așadar, ***aria unui paralelogram este egală cu produsul unei laturi prin înălțimea, dusă la această latură.***

Să aflăm aria unui triunghi. Fie *ABC* un triunghi (fig. 198). Completăm acest triunghi pînă la paralelogramul *ABCD* (ca în figură). Aria paralelogramului este egală cu suma ariilor triunghiurilor *ABC* și *CDA*. Întrucît aceste triunghiuri sînt egale, aria paralelogramului este egală cu aria dublată a triunghiului *ABC*. Înălțimea paralelogramului, corespunzătoare laturii *AB*, este egală cu înălțimea triunghului *ABC*, dusă pe latura *AB*.

De aici rezultă că ***aria unui triunghi este egală cu semiprodusul unei laturi a lui prin înălțimea, dusă pe această latură.***

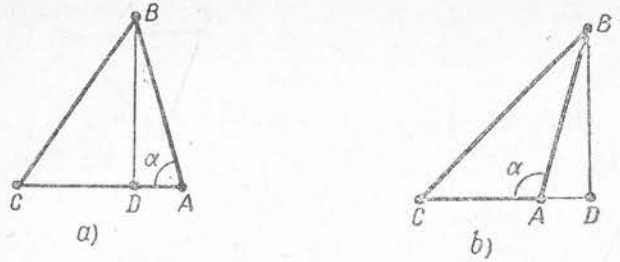


Fig. 199

Problemă (26). Demonstrați că aria triunghiului *ABC* poate fi calculată cu ajutorul formulei:

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A.$$

Rezolvare. In triunghiul *ABC* ducem înălțimea *BD* (fig. 199). Avem: $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD$. Din triunghiul dreptunghic *ABD* avem $BD = AB \cdot \sin \alpha$, dacă unghiul α este ascuțit (fig. 199, *a*) și $BD = AB \cdot \sin(180° - \alpha)$, dacă unghiul α este obtuz (fig. 199, *b*). Deoarece $\sin(180° - \alpha) = \sin \alpha$, în orice caz $BD = AB \cdot \sin \alpha$. Prin urmare, aria triunghiului

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot AB \sin A.$$

Problemă (33). Deduceți formula lui Heron* pentru aria unui triunghi:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

unde *a*, *b*, *c* sînt lungimile laturilor triunghiului, iar *p* este semiperimetrul lui.

Rezolvare. Avem:

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma,$$

unde γ este unghiul opus laturii *c* în triunghiul dat. Conform teoremei cosinusurilor

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

* Heron din Alecsandria — savant din Grecia Antică, care a trăit în sec. I e.n.

De aici

$$\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab},$$

$$\sin^2\gamma = 1-\cos^2\gamma = (1-\cos\gamma)(1+\cos\gamma) =$$

$$= \left(1-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)\left(1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right) = \frac{2ab-a^2-b^2+c^2}{2ab} \times$$

$$\times \frac{2ab+a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{c^2-(a-b)^2}{2ab} \cdot \frac{(a+b)^2-c^2}{2ab} =$$

$$= \frac{1}{4a^2b^2}(c-a+b)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c).$$

Observînd că $(a+b+c)=2p$, $a+b-c=2p-2c$, $a+c-b=2p-2b$, $c-a+b=2p-2a$, obţinem:

$$\sin\gamma = \frac{2}{ab}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Aşadar,

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Să calculăm aria unui trapez. Fie $ABCD$ trapezul dat (fig. 200). Diagonala AC împarte trapezul în două triunghiuri: ABC şi CDA. Prin urmare, aria trapezului este egală cu suma ariilor acestor triunghiuri. Aria triunghiului ABC este egală cu $\frac{1}{2}AB\cdot CE$, aria triunghiului ACD este egală cu $\frac{1}{2}DC\cdot AF$. Înălţimile CE şi AF ale acestor triunghiuri sînt egale cu distanţa dintre dreptele paralele AB şi CD. Această distanţă se numeşte înălţimea trapezului.

Prin urmare, ***aria unui trapez este egală cu produsul semisumei bazelor lui prin înălţime.***

Problemă (36). Pentru raza R a circumferinţei, cir-

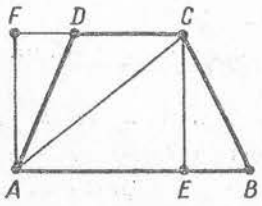


Fig. 200

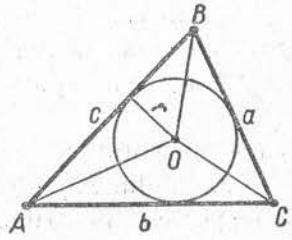


Fig. 201

c scrise unui triunghi, şi pentru raza r a circumferinţei înscrise într-un triunghi, deduceţi formulele:

$$R=\frac{abc}{4S},\quad r=\frac{2S}{a+b+c},$$

unde a, b, c sînt laturile triunghiului, iar S — aria lui.

Rezolvare. Deducem mai întîi formula pentru R. După cum ştim, $R=\frac{a}{2\sin\alpha}$, unde α este unghiul opus laturii a a triunghiului (problema 11 § 11).

Inmulţind numărătorul şi numitorul părţii drepte cu bc şi observînd că $\frac{1}{2}bc\sin\alpha=S$, obţinem: $R=\frac{abc}{4S}$.

Deducem formula pentru r (fig. 201). Aria triunghiului ABC este egală cu suma ariilor triunghiurilor OAB, OBC şi OCA:

$$S=\frac{1}{2}cr+\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br.$$

De aici

$$r=\frac{2S}{a+b+c}.$$

80. ARIILE FIGURILOR ASEMENEA

Fie F_1 şi F_2 două figuri simple asemenea. Să clarificăm, cum se raportă ariile acestor figuri. Deoarece figurile sînt asemenea, există o transformare de asemănare, prin care figura F_1 trece în figura F_2.

Impărţim figura F_1 în triunghiuri: Δ_1', Δ_2', Δ_3', ... Transformarea de asemănare, care transferă figura F_1 în figura F_2, transferă aceste triunghiuri în triunghiurile Δ_1'', Δ_2'', Δ_3'', ..., în care e împărţită figura F_2. Aria figurii F_1 este egală cu suma ariilor triunghiurilor Δ_1', Δ_2', ..., iar aria figurii F_2 este egală cu suma ariilor triunghiurilor Δ_1'', Δ_2'', ...

Dacă coeficientul de asemănare este egal cu k, dimensiunile triunghiului Δ_n'' sînt de k ori mai mari decît dimensiunile respective ale triunghiului Δ_n'. In particular, laturile şi înălţimile triunghiului Δ_n'' sînt de k ori mai mari

decît laturile şi înălţimile respective ale triunghiului $\triangle_n'$. De aici rezultă că

$$S(\triangle_n'') = k^2 S(\triangle_n').$$

Adunînd termen cu termen aceste egalităţi, obţinem

$$S(F_2) = k^2 S(F_1).$$

Coeficientul de asemănare k este egal cu raportul dimensiunilor liniare corespunzătoare ale figurilor F_2 şi F_1. De aceea ***ariile figurilor asemenea se raportă ca pătratele dimensiunilor lor liniare corespunzătoare.***

81. ARIA CERCULUI

Dacă figura este simplă, adică poate fi împărţită într-un număr finit de triunghiuri, aria ei este egală cu suma ariilor acestor triunghiuri. Aria unei figuri arbitrare se defineşte în felul următor.

O figură dată are aria S, dacă există figuri simple ce se conţin în figura dată şi există figuri simple ce conţin această figură, ariile cărora diferă de S oricît de puţin. Vom aplica această definiţie pentru a afla aria cercului.

Se numeşte *cerc* figura, care constă din toate punctele planului, situate de la un punct dat la o distanţă nu mai mare decît o distanţă dată. Acest punct se numeşte *centrul cercului*, iar distanţa dată — *raza cercului*. Frontiera unui cerc este o circumferinţă cu acelaşi centru şi aceeaşi rază (fig. 202).

Aria unui cerc este egală cu semiprodusul dintre lungimea circumferinţei, care mărgineşte cercul şi raza.

Demonstraţie. Construim două poligoane regulate

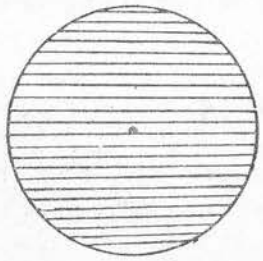


Fig. 202

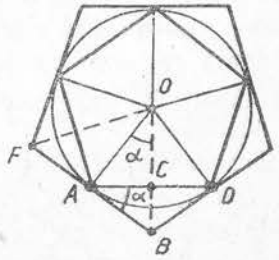


Fig. 203

cu n laturi: poligoanele P_1 — înscris şi P_3 — circumscris cercului dat (fig. 203). Poligoanele P_1 şi P_2 sînt figuri simple. Poligonul P_2 conţine cercul dat, iar poligonul P_1 se conţine în acest cerc.

Razele, duse în vîrfurile poligonului P_1, împart acest poligon în n triunghiuri, egale fiecare cu triunghiul AOD. De aceea

$$S(P_1) = nS(AOD).$$

Deoarece $S(AOD) = AC \cdot OC = AC \cdot OA \cos\alpha$, avem $S(P_1) = (nAC)AO \cos\alpha = \frac{pR}{2} \cos\alpha$, unde p este perimetrul poligonului P_1, R — raza cercului. În mod analog aflăm aria poligonului P_2:

$$S(P_2) = nS(BOF),$$

$$S(BOF) = AB \cdot AO = \frac{AC}{\cos\alpha} \cdot AO,$$

$$S(P_2) = \frac{(nAC)AO}{\cos\alpha} = \frac{pR}{2\cos\alpha}.$$

Aşadar, poligonul P_1, care se conţine în cerc, are aria

$$S(P_1) = \frac{pR}{2} \cos\alpha,$$

iar poligonul P_2, care conţine cercul, are aria

$$S(P_2) = \frac{pR}{2\cos\alpha}.$$

Pentru un n destul de mare perimetrul p diferă oricît de puţin de lungimea l a circumferinţei, iar $\cos\alpha$, diferă oricît de puţin de unitate (deoarece unghiul α este mic). Rezultă că ariile poligoanelor P_1 şi P_2 diferă de $\frac{lR}{2}$ oricît

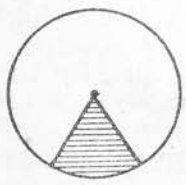
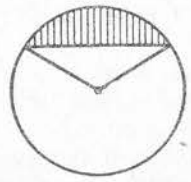


Fig. 204



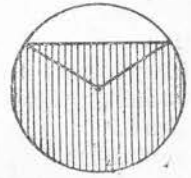


Fig. 205

de puțin. Conform definiției aceasta înseamnă că aria cercului

$$S = \frac{lR}{2} = \pi R^2,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Partea cercului, situată în interiorul unui unghi la centru, se numește sector circular (fig. 204).

Aria unui sector circular se calculează după formula

$$S = \frac{\pi R^2}{360}\alpha,$$

unde R este raza cercului, iar α — măsura în grade a unghiului la centru respectiv.

Partea comună a unui cerc și a unui semiplan se numește *segment circular* (fig. 205).

Aria unui segment circular, diferit de un semicerc, se calculează după formula

$$S = \frac{\pi R^2}{360}\alpha \pm S_\triangle,$$

unde α este măsura în grade a unghiului la centru, care conține arcul acestui segment circular, iar $S_\triangle$ — aria triunghiului cu un vîrf în centrul cercului și cu celelalte în extremitățile razelor, ce mărginesc sectorul circular dat. Semnul „—" trebuie luat atunci, cînd $\alpha < 180°$, iar semnul „+" — atunci, cînd $\alpha > 180°$.

ÎNTREBĂRI PENTRU REPETARE

1. Formulați proprietățile ariei.
2. Demonstrați că aria dreptunghiului cu laturile a și b este egală cu ab.
3. Demonstrați că aria unui paralelogram este egală cu produsul unei laturi prin înălțimea, dusă la această latură.
4. Demonstrați că aria unui triunghi este egală cu semiprodusul unei laturi prin înălțimea, dusă la această latură.
5. Demonstrați că aria unui trapez este egală cu produsul dintre semisuma bazelor și înălțime.
6. Cum se raportă ariile figurilor asemenea?

7. Deduceți formula ariei cercului.
8. După ce formule se calculează ariile sectorului circular și segmentului circular?

EXERCIȚII

1. Demonstrați că suma ariilor pătratelor, construite pe catetele unui triunghi dreptunghic, este egală cu aria pătratului, construit pe ipotenuză.
2. Laturile a două loturi de pămînt de formă pătrată sînt egale cu 100 m și 150 m. Aflați latura unui lot pătrat, echivalent cu loturile date.
3. Aflați aria S a unui pătrat, dacă diagonala lui este a.
4. De cîte ori aria pătratului, circumscris unei circumferințe, este mai mare decît aria pătratului, înscris în aceeași circumferință?
5. Cum se va schimba aria unui pătrat, dacă fiecare latură a lui se va mări de 3 ori?
6. De cîte ori trebuie micșorate laturile unui pătrat, pentru ca aria lui să se micșoreze de 25 de ori?
7. Aria unui dreptunghi este egală cu 144 m². Aflați laturile lui dacă ele se raportă ca 4 : 9.
8. Cu ce sînt egale laturile unui dreptunghi, dacă perimetrul lui este egal cu 74 dm, iar aria este egală cu 3 m²?
9. Laturile unui paralelogram sînt egale respectiv cu laturile unui dreptunghi. Aflați unghiul ascuțit al paralelogramului, dacă aria lui este egală cu o jumătate din aria dreptunghiului.
10. Un pătrat și un romb au perimetrele egale. Care din aceste figuri are o arie mai mare? Argumentați răspunsul.
11. Aflați aria unui romb, dacă înălțimea lui este egală cu 10 cm, iar unghiul ascuțit are 30°.
12. Aflați aria rombului, dacă înălțimea lui este egală cu 12 cm, iar diagonala mai mică — cu 13 cm.
13. Demonstrați că aria unui romb este egală cu semiprodusul diagonalelor.
14. Aflați latura rombului, dacă se știe că diagonalele lui se raportă ca 1 : 2, iar aria rombului este egală cu 12 cm².
15. Demonstrați afirmația: dacă diagonalele unui patrulater convex sînt perpendiculare, aria lui este egală cu semiprodusul diagonalelor.
16. Împărțiți triunghiul dat în trei părți echivalente prin drepte, care trec prin același vîrf.

17. Rezolvați problema precedentă, înlocuind triunghiul cu un paralelogram.
18. Cu ce este egală aria unui triunghi isoscel, dacă baza lui este egală cu 120 m, iar latura laterală — cu 100 m?
19. Aflați aria unui triunghi dreptunghic isoscel cu ipotenuza a.
20. Într-un triunghi cu laturile de 8 cm și 4 cm sînt duse înălțimi la aceste laturi. Înălțimea, dusă la latura de 8 cm, este egală cu 3 cm. Cu ce este egală înălțimea, dusă la latura de 4 cm?
21. Demonstrați că laturile unui triunghi sînt invers proporționale cu înălțimea lui, adică:

$$a:b:c=\frac{1}{h_a}:\frac{1}{h_b}:\frac{1}{h_c}.$$

22. Aflați aria triunghiului echilateral cu latura a.
23. Aflați aria triunghiului regulat, înscris într-un cerc de rază R.
24. Aflați aria unui triunghi dreptunghic, dacă înălțimea lui împarte ipotenuza în segmente de 32 cm și 18 cm.
25. Aflați catetele unui triunghi dreptunghic, dacă ipotenuza lui este egală cu 73 cm, iar aria — cu 1320 cm².
26. Demonstrați că aria triunghiului ABC poate fi calculată cu ajutorul formulei:

$$S=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin A\cdot$$

27. În triunghiul ABC $AC=a$, $BC=b$. Pentru ce valoare a unghiului C aria triunghiului va fi cea mai mare?
28. Aflați aria triunghiului isoscel, la care laturile laterale sînt egale cu 1 m, iar unghiul între ele este egal cu 70°.
29. Aflați aria paralelogramului, dacă laturile lui sînt egale cu 2 m și 3 m, iar unul din unghiuri este egal cu 70°.
30. Aflați aria triunghiului, dacă o latură a lui este α, iar unghiurile alăturate ei sînt egale cu α și β.
31. Demonstrați că aria unui paralelogram este egală cu semiprodusul diagonalelor prin sinusul unghiului dintre ele.
32. Demonstrați că din toate paralelogramele cu diagonalele date aria cea mai mare o are rombul.
33. Deduceți formula lui Heron pentru aria unui triunghi:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

unde a, b, c sînt lungimile laturilor triunghiului, iar p — semiperimetrul lui.
34. Aflați aria triunghiului, dacă sînt date cele trei laturi:

1) 13, 14, 15; 2) 5, 5, 6; 3) 17, 65, 80; 4) $\frac{25}{6}$, $\frac{29}{6}$, 6; 5) 13, $37\frac{12}{13}$, $47\frac{1}{13}$; 6) $2\frac{1}{12}$, $3\frac{44}{75}$, 1,83.

35. Aflați înălțimea cea mai mică a triunghiului cu laturile:
1) 13, 14, 15; 2) 5, 5, 6; 3) 17, 65, 80
și cea mai mare înălțime a triunghiului cu laturile:
4) $\frac{25}{6}$, $\frac{29}{6}$, 6; 5) 13, $37\frac{12}{13}$, $47\frac{1}{13}$; 6) $2\frac{1}{12}$, $3\frac{44}{75}$, 1,83.

36. Pentru raza R a circumferinței, circumscrise unui triunghi, și raza r a circumferinței, înscrise într-un triunghi, deduceți următoarele formule:

$$R=\frac{abc}{4S},\quad r=\frac{2S}{a+b+c},$$

unde a, b, c sînt laturile triunghiului, iar S — aria lui.
37. Aflați raza R a circumferinței circumscrise și raza r a circumferinței înscrise pentru triunghiul cu laturile de:
1) 13, 14, 15; 2) 15, 13, 4; 3) 35, 29, 8; 4) 4, 5, 7.
38. Latura laterală a unui triunghi isoscel este egală cu 6 cm, înălțimea — cu 4 cm. Aflați raza circumferinței circumscrise.
39. Demonstrați că raza circumferinței, înscrise într-un triunghi dreptunghic, este egală cu semidiferența dintre suma catetelor și ipotenuză.
40. Catetele unui triunghi dreptunghic sînt egale cu 40 cm și 42 cm. Aflați razele circumferințelor circumscrisă și înscrisă.
41. Aflați aria trapezului, la care laturile paralele sînt de 60 cm și 20 cm, iar cele neparalele — de 13 cm și 37 cm.
42. Într-un trapez isoscel baza mare este egală cu 44 m, latura laterală cu 17 m și diagonala cu 39 m. Aflați aria trapezului.
43. Aflați aria cercului, dacă lungimea circumferinței este l.
44. Aflați aria inelului circular (fig. 206), cuprins între două circumferințe cu unul și același centru și cu razele de:
1) 4 cm și 6 cm; 2) 5,5 m și 6,5 m; 3) a și b $(a>b)$.
45. De cîte ori se va mări aria unui cerc, dacă diametrul lui se mărește: 1) de 2 ori; 2) de 5 ori; 3) de m ori?

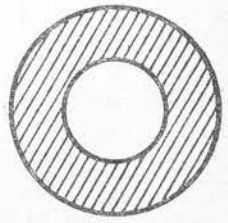


Fig. 206

46. Aflați raportul dintre aria unui cerc și aria: 1) pătratului înscris; 2) triunghiului regulat înscris; 3) hexagonului regulat înscris în acest cerc.

47. Aflați raportul dintre aria cercului înscris într-un triunghi regulat, și aria cercului, circumscris acestui triunghi.

48. Aflați raportul dintre aria cercului, circumscris unui pătrat, și aria cercului, înscris în acest pătrat.

49. Aflați aria unui sector de cerc de rază R, dacă unghiul la centru, care corespunde acestui sector este egal cu: 1) 40°; 2) 90°; 3) 150°; 4) 240°; 5) 300°; 6) 330°.

50. Este dată o circumferință de rază R. Aflați aria sectorului corespunzător arcului cu lungimea: 1) R; 2) l.

51. Aflați aria segmentului circular cu baza $a\sqrt{3}$ și înălțimea $\frac{a}{2}$.

52. Aflați aria părții cercului, situată în exteriorul: 1) pătratului înscris; 2) triunghiului regulat înscris; 3) hexagonului regulat înscris în acest cerc. Raza cercului este egală cu R.

RĂSPUNSURI ȘI INDICAȚII LA EXERCIȚII

§ 1.

7. Cel mult un punct. **10.** 1), 4), 6) Intersectează; 2), 3), 5) nu intersectează. **11.** 6 segmente. **14.** 1) 6 cm; 2) 7,7 dm; 3) 18,1 m. **17.** 1), 2) Nu aparține, 3) aparține. **18.** 1), 2) Nu poate. **19.** Nu pot. **20.** Nu pot. **21.** Nu pot. **22.** 0,5 m sau 5,9 m. **23.** Segmentul AB. **24.** Nu poate. **25.** 1) $AC=9$ m; $BC=6$ m; 2) $AC=10$ m, $BC=5$ m; 3) $AC=BC=7{,}5$ m; 4) $AC=6$ m, $BC=9$ m. **27.** 1) 110°; 2) 119°; 3) 179°. **28.** 2) Nu poate. **29.** Unghiul (ab) e mai mare. **30.** 1) $\angle(ac)=45°$, $\angle(bc)=15°$; 2) $\angle(ac)=40°$, $\angle(bc)=20°$; 3) $\angle(ac)=\angle(bc=30°$; 4) $\angle(ac)=24°$; $\angle(bc)=36°$. **33.** Nu există. **34.** Un punct. **36.** 1) 1,2 m; 2) 2,4 cm. **38.** 11 cm. **39.** 100°. **41.** $PQ=5$ cm, $QR=6$ cm, $PR=7$ cm. **42.** $\angle A=40°$, $\angle B=60°$, $\angle C=80°$. **44.** În $\triangle ABC$: $AB=5$ cm, $BC=6$ cm, $AC=7$ cm. **46.** Nu se poate. **47.** Nu poate.

§ 2.

1. 150°, 135°, 120°, 90°. **2.** 1), 2) Nu pot; 3) pot să fie. **4.** 1) 105° și 75°; 2) 110° și 70°; 3) 45° și 135°. **5.** 1) 72° și 108°; 2) 54° și 126°; 3) 55° și 125°; 4) 88° și 92°. **6.** 150°, 150°, 30°. **7.** 130°. **9.** 144° și 36°. **10.** 65° și 115°. **11.** Toate unghiurile sînt drepte. **14.** 1) 20°; 2) 60°; 3) 90°. **15.** $\angle(a_1b)=120°$, $\angle(a_1c)=150°$; $\angle(bc)=30°$. **17.** 1) 110°; 2) 175°; 3) 170°. **18.** 1) 15°; 2) 26°; 3) 86°. **19.** 1) 120°; 2) 150°; 3) 178°. **21.** Indicație. Folosiți rezultatul problemei 20 și teorema 2.3. **22.** 1) 155°; 2) 135°; 3) 105°. **23.** 2) Indicație. Uniți punctele A și C printr-un segment și aplicați afirmația problemei 23, 1.

§ 3.

10. 0,3 m. **11.** 3,5 m. **12.** 1) 3,2 m, 6,2 m, 6,2 m; 2) 7,2 m, 4,2 m, 4,2 m. **21.** Indicație. Aplicați proprietatea medianei într-un triunghi isoscel. **25.** 15 m. **26.** 15 m. **29.** Indicație. Aplicați afirmația problemei 28. **38.** Indicație. Prelungiți medianele cu lungimea lor. **40.** Indicație. Prelungiți medianele cu lungimea lor.

§ 4.

2. Unghiurile AB_1C_1 și AC_1B_1 și unghiurile BB_1C_1 și CC_1B_1 sînt interne de aceeași parte a secantei, iar unghiurile AB_1C_1 și CC_1B_1 și unghiurile BB_1C_1 și AC_1B_1 sînt alterne interne. 8. 105° și 75°. 9. 75°. 10. Trei unghiuri au cîte 72° fiecare și patru unghiuri au cîte 108° fiecare. 11. Nu poate. 13. 90°. 14. 1) 100°; 2) 65°; 3) 35°; 4) 35°. 15. 1) 30°, 60°, 90°; 2) 40°, 60°, 80°; 3) 45°, 60°, 75°; 4) 48°, 60°, 72°; 5) 50°, 60°, 70°. 16. Nu poate. 17. Nu poate. 18. 1) 100°; 2) 70°; 3) 36°. 19. 1) 50°; 2) 30°; 3) 75°. 20. 40°, 40°. 21. 70° și 40° sau 55° și 55°. 22. 1) 80°, 80°, 20°; 2) 70°, 70°, 40°; 3) Două unghiuri sînt egale cu $120°-\frac{2}{3}\alpha$ și un unghi este egal cu $\frac{4}{3}\alpha-60°$. 24. 1) 105°; 2) $180°-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$; 3) 155°; 4) $90°+\frac{\gamma}{2}$. 25. 110°, 35°. 26. 60°, 30° și 90°. 27. 110°. 29. 1) 20°; 2) 65°; 3) α. 30. Unghiurile $\triangle ABD$: $\angle A=\alpha$, $\angle D=90°$, $\angle B=90°-\alpha$, unghiurile $\triangle CBD$: $\angle D=90°$, $\angle B=\alpha+\beta-90°$, $\angle C=180°-\alpha-\beta$. 32. 60°. 33. $\angle D=\frac{1}{2}\angle A$, $\angle E=\frac{1}{2}\angle C$, $\angle DBE=\angle B+\frac{1}{2}(\angle A+\angle C)$. 34. 140°, 10°. 36. 90°, 45°, 45°. 37. $\angle D=90°$, $\angle B=60°$; $\angle A=30°$. 38. 150°. 39. 90°.

§ 5.

1. Indicație. Depuneți pe semidreaptă un segment egal cu raza. 2. Vezi problema 1. 5. 60°. 6. 120°. 7. Nu poate. 9. 30°. 10. 60° și 120°. 11. 70 cm, 10 cm. 12. Nu pot. 13. 1) Nu pot; 2) nu pot. 25. Indicație. Începeți cu construcția unui triunghi echilateral. 27. Indicație. În triunghiul căutat prelungiți mediana cu lungimea ei. 32. Indicație. Începeți cu construcția înălțimii. 36. Vezi problema 42 § 4. 37. Vezi problema 36. 45. Indicație. Centrul circumferinței căutate se află pe bisectoarea unghiului. 46. 10 cm. 47. 5 cm. 50. Vezi problema 49. 52. α sau $180°-\alpha$. 53. 50°. 54. Indicație. 1) Punctul dat, punctul de tangență și centrul circumferinței sînt vîrfurile unui triunghi dreptunghic. 2) Reduceți rezolvarea problemei la problema precedentă, construind o circumferință auxiliară concentrică cu una din cele date și cu raza egală cu suma sau diferența razelor circumferințelor date. 59. Indicație. Aplicați proprietatea unghiurilor înscrise în circumferință.

§ 6.

3. Trei. 4. 10 m. 5. 3 cm. 7. $BC=AD=4{,}8$ m. 8. 40°, 140°, 140°. 9. 115° și 65°. 10. Nu pot. 11. 60°, 60°, 120°, 120°. 12. 1) 40°, 40°, 140°, 140°; 2) 50°, 50°, 130°, 130°; 3) 80°, 80°, 100°, 100°. 13. 1) 55°, 55°, 125°, 125°, 2), 35°, 35°, 145°, 145°; 3) 20°, 20°, 160°, 160°. 16. $BE=9$ cm, $CE=6$ cm. Indicație. Demonstrați că triunghiul ABE este isoscel cu baza AE. 17. 0,6 m și 0,8 m. 18. $AB=BD=1{,}1$ m; $AD=0{,}8$ m. 23. 60 cm. 24. 10 cm și 18 cm. 25. 12 cm, 20 cm. 26. 12 cm. 27. 10 cm și 25 cm sau 7,5 cm și 18,75 cm. 30. 80° și 100°. 32. 60° și 120°. 35. 4 m. 37. 2 m. 38. 2 m. 39. 4 m, 8 m. 40. 1 m. 41. 10 cm. 42. 4 cm, 5 cm, 6 cm. 43. 6 cm. 44. 6 cm, 5 cm, 5 cm. 48. 5 m, 6 m. 49. $a+b$. 52. 3 m, 4 m. 54. 70° și 110°. 55. 1,7 m. 56. 24 cm, 36 cm. 57. 60° și 120°. 58. 15 m. 59. 3 cm. 61. 4 m, 6 m. 62. 2,2 m. 63. 9 cm și 5 cm. 64. a. 65. Indicație. Construiți mai întîi un triunghi, două laturi ale căruia sînt egale cu laturile laterale ale trapezului, iar a treia este egală cu diferența bazelor. 66. Indicație. Construiți mai întîi un triunghi, două laturi ale căruia sînt egale cu diagonalele trapezului, iar a treia — cu suma bazelor lui.

§ 7.

3. 5 m sau $\sqrt{7}$ m. 4. 1) 5 cm; 2) 17 cm; 3) 6,5 m. 5. 109 cm. 6. $\frac{a}{\sqrt{2}}$. 7. Nu poate. 8. $\frac{25}{3}$, $\frac{20}{3}$. 9. 1) 15 cm, 20 cm; 2) 60 m, 80 m. 11. Indicație. Segmentul căutat este înălțimea unui triunghi dreptunghic, piciorul căreia împarte ipotenuza în segmente egale cu a și b. 12. $\sqrt{116}$ m $\approx 10{,}8$ m. 13. $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$. 14. 32 cm, 60 cm, 15 cm. 17. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. 18. 24 cm. 19. 36 cm, 54 cm. 20. 25 cm sau 11 cm. 22. 1) 24 cm; 2) 24 cm. 23. 12 cm, 11,2 cm, $\frac{168}{13}$ cm. 24. 13,44 cm. 25. 2) Nu pot. 26. 10 cm, 6 cm. 27. $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{2b-a}{2b+a}}$. 28. $R=\frac{169}{24}$ cm, $r=\frac{10}{3}$ cm. 29. $90°-\alpha$. $a\cos\alpha$, $a\sin\alpha$. 30. $90°-\alpha$, $\frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$, $\frac{a}{\sin\alpha}$. 33. 1) $\sin 16° = 0{,}2756$, $\cos 16°=0{,}9613$; 2) $\sin 24°36'=0{,}4163$, $\cos 24°36'=0{,}9092$; 3) $\sin 70°32'=0{,}9428$, $\cos 70°32'=0{,}3333$; 4) $\sin 88°49'=0{,}9998$, $\cos 88°49'=0{,}0206$. 34. 1) $x=1°$; 2) $x=30°6'$; 3) $x=47°3'$; 4) $x=86°9'$. 35. 1) $\operatorname{tg} 10° = 0{,}1763$; 2) $\operatorname{tg} 40°40'=0{,}8591$; 3) $\operatorname{tg} 50°30' = 1{,}213$; 4) $\operatorname{tg} 70°15'=2{,}785$. 36. 1) $x=17°53'$; 2) $x=38°7'$; 3) $x=80°46'$; 4) $x=83°50'$. 37. 31°25′; 31°25′; 117°10′; 23,8 cm. 38. 34°10′ și 55°50′. 39. 51°. 40. 116°16′ și 63°44′. 41. 29°52′ și 150°8′. 42. 12 m, 45°14′. 43. 60°16′. 44. $\frac{a}{\sqrt{2}}$. 45. 1) a) 5; 36°52′; 53°8′; b) 41; 12°41′; 77°19′; c) 29; 43°36′; 46°24′; d) 61; 10°23′; 79°37′. 2) a) 12; 22°37′; 67°23′; b) 24; 16°16′; 73°44′; c) 15; 28°4′; 61°56′; d) 13; 81°12′; 8°48′. 3) a) 70°; 0,68; 1,88; b) 39°40′; 3,08; 2,55; c) 19°24′; 7,55; 2,66; d) 13°39′; 15,55; 3,78. 4) a) 59°33′; 5,92; 5,10; b) 49°12′; 7,65; 5,79; c) 29°25′; 8,04; 3,95; d) 22°; 9,71; 3,64. 46. 1) $\cos^2\alpha$; 2) $\sin^2\alpha$; 3) 2; 4) $\sin^3\alpha$; 5) 1; 6) $\sin^2\alpha$; 7) 1; 8 $\sin^2\alpha$;

9) $1+\operatorname{tg}^6\alpha$ **47** 1) $\sin\alpha=\frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{12}{5}$, 2) $\sin\alpha=\frac{8}{17}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{8}{15}$; 3) $\sin\alpha=0{,}8$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{3}$. **48** 1) $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$ 2) $\cos\alpha=\frac{9}{41}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{40}{9}$; 3) $\cos\alpha=0{,}6$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{3}$ **50** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **51.** $r=\frac{a}{2\sqrt{3}}$, $R=\frac{a}{\sqrt{3}}$. **52.** 29 cm. **53.** $(\sqrt{3}-1)$m $\approx 0{,}732$m, $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\frac{1}{}$m $\approx$ $\approx$ 0,517 m. **54.** 60° şi 120°. **55.** 60°, 60°, 120°, 120°. **56.** 1), 6) α; 2), 3), 4), 5) β. **57.** BC. **58.** $\angle A$. **59.** 3m. **62.** Nu poate. **63.** 2 m. **67.** Punctul de intersecţie a segmentelor AB şi CD. **68.** Nu pot. **71.** $R-d$, $R+d$. Indicaţie. Aplicaţi inegalitatea triunghiului. **72.** $d+R$, $d-R$. Indicaţie. Aplicaţi inegalitatea triunghiului. **73.** Nu pot. **74.** Nu pot. **75.** Indicaţie. Comparaţi distanţa dintre centrele circumferinţelor şi razele lor. **76.** Nu pot.

§ 8.

3. 2. **4.** 3. **5.** (2, 0). **6.** (0, 3). **7.** O dreaptă paralelă cu axa y. **8.** Două drepte: $x=3$ şi $x=-3$. **10.** Pe semiaxa pozitivă. **11.** 4; **3.** **12.** 5. **13.** $x=2$. **14.** $x=-2$. **15.** Dreapta care conţine bisectoarele cadranelor I şi III. **16.** Dreapta care conţine bisectoarele cadranelor II şi IV. **18.** (0, −2). **19.** (1, 1). **20.** (3, 3). **23.** 1) 2; 2) 4. **25.** $AB=5$, $AC=10$, $BC=5$. **26.** Punctul B. **28.** (3, 3) şi (15, 15). **29.** (3, 4), (−4, 3), (0, 5). **30.** (5, 12) şi (5, −12); (5, −12) şi (−5, −12). **31.** $x^2+(y-3)^2=13$. **32.** $(x+4)^2+(y-3)^2=25$. **34.** Vezi problema 33. **35.** 1), 3), 4) Nu poate; 2) poate. **36.** (−2, 0) sau (4, 0). **37.** (7, 0) şi (1, 0). **38.** (2, 2) şi (−2, −2). **39.** $(x-1)^2+(y-2)^2=4$. **40.** $(x+3)^2+(y-4)^2=25$. **43.** $x+y=2$. **44.** 1) (−3, 0), (0; −1,5); 2) (4, 0), (0, 3), 3) (−2, 0) (0, 3); 4) (2,5; 0), (0, −5). **45.** (−1, 1); (3, −2) **46.** 1) (1, 2); 2) (2, 4); 3) (0,5; −2). **48.** 1) $x+y=5$, 2) $3x+10y=2$ 3) $x+6y=-13$. **49.** $a=b=\frac{1}{3}$. **50.** −3. **51.** $\pm\sqrt{2}$. **52.** Indicaţie Aflaţi punctul de intersecţie a două drepte şi verificaţi dacă el aparţine celei de-a treia drepte. **54.** $y=3$. **56.** $\sin 120°=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 120°=-\frac{1}{2}$ $\operatorname{tg}120°=-\sqrt{3}$; $\sin 135°=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 135°=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{tg}135°=-1$; $\sin 150°=\frac{1}{2}$, $\cos 150°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}150°=-\frac{1}{\sqrt{3}}$. **57.** $\sin 160°=0{,}3420$; $\cos 140°=-0{,}7660$; $\operatorname{tg}130°=-1{,}192$. **58.** 1) $\sin 40°=0{,}6428$; $\cos 40°=0{,}7660$; $\operatorname{tg}40°=0{,}8391$; 2) $\sin 14°36'=0{,}2521$, $\cos 14°36'=0{,}9677$;

$\operatorname{tg}14°36'=0{,}2605$; 3) $\sin 70°20'=0{,}9417$ $\cos 70°20'=0{,}3365$; $\operatorname{tg}70°20'=2{,}798$; 4) $\sin 30°16'=0{,}5040$ $\cos 30°16'=0{,}8637$; $\operatorname{tg}30°16'=0{,}5836$; 5) $\sin 130°=0{,}7660$; $\cos 130°=-0{,}6428$; $\operatorname{tg}130°=1\,192$; 6) $\sin 150°30'=0{,}4924$; $\cos 150°30'=-0{,}8704$; $\operatorname{tg}150°30'=0{,}5658$; **59.** $\alpha_1\approx 11°32'$ sau $168°28'$ $\alpha_2\approx 134°26'$; $\alpha_3\approx 158°12'$. **60.** 1) $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha=2\sqrt{2}$; 2) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\sqrt{3}$; 3) $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{tg}\alpha=1$; 4) $\sin\alpha=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{\sqrt{3}}$. **61.** 1) $\cos\alpha=0{,}8$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$; 2) $\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$; 3) $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{2}}$. $\operatorname{tg}\alpha=-1$ sau $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{tg}\alpha=1$. **62.** $\sin\alpha=\frac{5}{13}$, $\cos\alpha=-\frac{12}{13}$.

§ 9.

12. 1) Nu; 2) nu. **15.** Nu poate. **20.** Un segment. **21.** O dreaptă. **22.** O mulţime infinită. Pe o dreaptă paralelă cu cele date şi egal depărtată de ele. **23.** Trei. **25.** Două. **26.** O mulţime infinită. **29.** 1) Indicaţie. Folosiţi transformarea de simetrie în raport cu punctul dat. 2) Indicaţie. Folosiţi simetria în raport cu dreapta b. **35.** O circumferinţă. Indicaţie. Folosiţi omotetia în raport cu extremitatea comună a coardelor. **38.** Indicaţie. Folosiţi omotetia în raport cu vîrful triunghiului opus laturii date. **39.** 0,8 m; 1 m, 1,2 m. **40.** 10 m, 25 m, 20 m. **42.** 13,6 cm. **43.** $AC=4$ m, $B_1C_1=14$ m. **44.** $AC=24$ cm; $A_1C_1=18$ cm, $B_1C_1=15$ cm. **46.** 15 cm, 20 cm, 25 cm. **47.** 21 cm. **49.** $\frac{ah}{a+h}$. **50.** $A_1C_1=1{,}2$ m; $AC=3$ m. **51.** 1) Nu sînt asemenea; 2) sînt asemenea. **52.** 1) Sînt asemenea; 2) nu sînt asemenea. **53.** 1) Sînt asemenea; 2) nu sînt asemenea. **55.** $\frac{m}{n}$. **56.** 4 cm. **57.** $\frac{27}{28}$. **58.** 1) 14 cm; 2) 6 dm. **59.** Indicaţie. Pe o latură a unui unghi depuneţi de la vîrful lui segmentele a şi b, iar pe cealaltă — segmentul c. Duceţi prin extremitatea segmentului a o dreaptă paralelă cu dreapta care trece prin extremităţile segmentelor b şi c. **60.** Sînt asemenea. **61.** 1) Da; 2) da; 3) nu. **62.** 1 m, 2 m, 2,5 m. **63.** 6,5 m, 5,5 m. **64.** ≈ 42 m. **66.** $\frac{bc}{b+c}$ **67.** $m:n$. **68.** $n:m$. **69.** $AC=18$ m. Indicaţie. Triunghiurile ACD şi CBA sînt asemenea. **70.** $m:n$. **71.** 15 cm, 18 cm. **72.** 4,5 cm. **73.** $\frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}$. **77.** $\approx 225{,}8$ km (vezi problema 76). **78.** $\approx 82{,}4$ km (vezi problema 76).

§ 10.

1. $(1, -1)$, $(2\ -1)$, $(1, 1)$. 2. 1) $a=b=2$; 2) $a=-3$, $b=8$; 3) $a=b=1$. 4. 1) Nu există; 2) există. 7. Semidrepte la fel orientate: AB şi DC, BC şi AD, CD şi BA, DA şi CB. Semidrepte opus orientate: AB şi CD, BC şi DA, DC şi BA, AD şi CB. 8. Vectorii $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ şi $\overline{BC}$ sînt la fel orientaţi, vectorii $\overline{BA}$ şi oricare din vectorii $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ sînt opus orientaţi. 11. Vezi problema 10. 14. $m=\pm 12$. 15. $n=\pm 7$. 17. 1) $\overline{(3, -5)}$; 2) $\overline{(-1, 1)}$; 3) $\overline{(1, 0)}$; 4) $\overline{(-3, 2)}$; 5) $\overline{(1, 5)}$. 18. 1) $\overline{(0, 1)}$. 2) $\overline{(-5, 3)}$; 3) $\overline{(1, -1)}$; 4) $\overline{(-1, 1)}$; 5) $\overline{(-1; -2)}$. 20. 1) 5; 2) 10; 3) 13 21. 1) 13; 2) 10; 3) 17. 24. 1) $\overline{b}$ $(6, 8)$; 2) $\overline{b}(-6, -8)$. 25. 1) $\overline{(-6, -8)}$ 2) $\overline{(9, 7)}$; 3) $\overline{(12, 7)}$. 26. 1) 10; 2) 13; 3) 15. 27. 1) 15; 2) 39; 3) 30. 28. 1) $\pm\frac{1}{2}$; 2) ± 1; 3) $\pm\frac{5}{13}$. 30. Vectorii $\overline{a}$ şi $\overline{c}$ sînt la fel orientaţi, vectorii $\overline{b}$ şi $\overline{d}$ sînt opus orientaţi: $|\overline{a}|=|\overline{d}|$, $|\overline{b}|=|\overline{c}|$; 32. $n=2$. 33 Vectorii unitari sînt: $\overline{a}$, $\overline{c}$, $\overline{d}$; vectorii $\overline{a}$ şi $\overline{d}$ sînt coliniari. 34. $\overline{(0,6;\ 0,8)}$. 37. $\overline{(2, -3)}$. 38. $\lambda=-5$, $\mu=4$. 40. 90°. 41. $\sqrt{3}$. 42. 30°. 43. $\cos A=0,6$; $\cos B=0$; $\cos C=0,8$. 44. $\angle A=30°$, $\angle B=60°$, $\angle C=90°$. 46. $m=-\frac{8}{3}$. 48. $\lambda=-\frac{1}{2}$. 55. 1) $\overline{OX}=\frac{\mu\overline{a}+\lambda\overline{b}}{\mu+\lambda}$.

§ 11.

2. $\frac{1}{2}\sqrt{c^2+d^2\pm 2cd\cos\alpha}$. 3. $\sqrt{a^2+b^2\pm 2ab\cos a}$. 6. 13 m sau $\sqrt{1513}\approx 38,9$ i. 7. $\frac{5}{13}$, $\frac{33}{65}$, $\frac{3}{5}$. 8. $m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$, $m_b=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}$, $m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2(c^2+b^2)-c^2}$. 9. Indicaţie. Folosiţi problema 8. 12. Nu poate. 13. Nu poate. 14. $AB=\frac{AC\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

15. $x=\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$. 16. Segmentul AD e mai mare. 18. Latura AB e cea mai mare, latura BC e cea mai mică. 19. Unghiul B e cel mai mare, unghiul C e cel mai mic. 20. Latura laterală e mai mare. 26. Latura AB se măreşte.

27. 1) $\alpha=105°$, $b\approx 2,59$, $c\approx 3,66$;
2) $\alpha=45°$, $b\approx 17,93$, $c\approx 14,64$;
3) $\alpha=20°$, $b\approx 65,78$, $c\approx 88,52$;
4) $\gamma=119°$, $a\approx 16,69$, $c\approx 24,83$;

5) $\gamma=68°$, $a\approx 13,57$, $b\approx 11,22$.
28. 1) $\alpha\approx 79°6'$, $\beta\approx 40°54'$, $c\approx 10,58$;
2) $\alpha\approx 11°2'$, $\beta\approx 38°58'$, $c\approx 28,02$;
3) $\beta\approx 26°45'$, $\gamma\approx 58°15'$, $a\approx 19,92$;
4) $\beta\approx 20°30'$, $\gamma\approx 14°30'$, $a\approx 22,92$;
5) $\alpha\approx 16°20'$, $\gamma\approx 11°40'$, $b\approx 53,41$;
6) $\alpha\approx 129°50'$, $\gamma\approx 35°10'$, $b\approx 8,09$.
29. 1) $c\approx 8,69$, $\beta\approx 21°9'$, $\gamma\approx 38°51'$;
2) $c\approx 19,63$, $\beta\approx 12°53'$, $\gamma\approx 29°7'$;
3) $c\approx 22,30$, $\beta\approx 5°35'$, $\gamma\approx 10°25'$.
4) Nu are soluţie.
5) $c\approx 11,40$, $\beta\approx 41°49'$, $\gamma\approx 108°11'$;
sau $c\approx 2,46$, $\alpha\approx 138°11'$, $\gamma\approx 11'49$.
30. 1) $\alpha\approx 28°57'$, $\beta\approx 46°34'$, $\gamma\approx 104°29'$;
2) $\alpha\approx 53°35'$, $\beta\approx 13°18'$, $\gamma\approx 113°7'$;
3) $\alpha\approx 34°3'$, $\beta\approx 44°25'$, $\gamma\approx 101°32'$;
4) $\alpha\approx 38°38'$, $\beta\approx 92°50'$, $\gamma\approx 48°32'$;
5) $\alpha\approx 14°58'$, $\beta\approx 11°$, $\gamma\approx 154°2'$;
6) $\alpha\approx 135°35'$, $\beta\approx 15°30'$, $\gamma\approx 28°55'$.

§ 12.

2. R_1+R_2-d, R_1-R_2-d. 6. Nu poate. 8. $\frac{1}{2}n(n-3)$. 10. 36°, 72°, 108°, 144°. 11. 1) 8; 2) 12. 1) 10 laturi; 2) 15 laturi. 13. Indicaţie. Acest poligon cu n laturi are toate laturile egale şi toate unghiurile egale. 14. Indicaţie. Acest poligon cu n laturi are toate laturile egale şi toate unghiurile egale. 18. Indicaţie. Exprimaţi ambele raze prin latura triunghiului. 19. $a=\sqrt{\frac{2}{3}}$. Indicaţie. Aflaţi mai întîi raza circumferinţei. 20. $2\sqrt{6}$ dm. 21. $2\sqrt{2}$ cm. 22. $\sqrt{3}$ cm. 24. Indicaţie. Folosiţi teorema cosinusurilor. 25. Indicaţie. Mai întîi cu ajutorul problemei 73 § 9 aflaţi latura poligonului cu 10 laturi, apoi după teorema cosinusurilor — latura poligonului cu 5 laturi.

$a_{10}=\frac{R(\sqrt{5}-1)}{2}$, $a_5=R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$. 26. $\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}$.

27. $\sqrt{r^2+\frac{a^2}{4}}$. 28. $b=\frac{2aR}{\sqrt{4R^2-a^2}}$. 29. $a=\frac{2bR}{\sqrt{4R^2+b^2}}$.
30. Indicaţie. Inscrieţi mai întîi un hexagon regulat. 31. Indicaţie. Circumscrieţi mai întîi un pătrat. 32. 1) 62,8 m; 2) 94,2 m. 33. 6,28 mm. 34. $\approx 3,06$. Indicaţie. Folosiţi rezultatul problemei 23. 35. $\approx 3,11$. Indicaţie. Folosiţi rezultatul problemei 24. 36. $\approx 6366,2$ km.

37. $\approx 6,3$ cm. 38. 1) $\frac{R\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$; 2) $\frac{R}{1+\sqrt{2}}$; 3) $\frac{R}{3}$. Indicaţie. Centrele

cercurilor sînt vîrfurile unui poligon regulat cu n laturi. **39.** 1) $R(3+2\sqrt{3})$; 2) $R(1+\sqrt{2})$; 3). R. Indicaţie. Centrele cercurilor sînt vîrfurile unui poligon regulat cu n laturi. **40.** $\approx$351,9 m/min. **41.** 1) 300° şi 60°; 2) 230° şi 130°; 3) 190° şi 170°. **42.** 1) 120°; 2) 90°; 3) 72°; 4) 60°; 5) 240°; 6) 270°. **43.** 31″. **44.** 1) $\approx$0,79 m; 2) $\approx$0,52 m; 3) $\approx$2,09 m; 4) $\approx$0,80 m; 5) $\approx$1,06 m; 6) $\approx$2,63 m. **45.** 1) $\frac{\pi a}{3}$; 2) $\frac{\pi a}{2\sqrt{2}}$; 3) $\frac{2\pi a}{3\sqrt{3}}$. Indicaţie. După coardă şi unghiul la centru respectiv aflaţi raza circumferinţei. **46.** 1) $\frac{3}{\pi}l$; 2) $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}l$; 3) $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}l$. Indicaţie. Aflaţi mai întîi raza circumferinţei. **47.** 1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{3}$.

§ 13.

1. Indicaţie. Aplicaţi teorema lui Pitagora. **2.** $\approx$180 m. **3.** $S=\frac{a^2}{2}$. **4.** De două ori. **5.** Aria se va mări de 9 ori. **6.** De 5 ori. **7.** 8 m, 18 m. **8.** 12 dm, 25 dm. **9.** 30°. **10.** Pătratul. **11.** 200 cm². **12.** 202,8 cm². **14.** $\sqrt{15}$ cm. **18.** 4800 m². **19.** $\frac{a^2}{4}$. **20.** 6 cm. **22.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **23.** $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$. **24.** 600 cm². **25.** 55 cm, 48 cm. **27.** $\angle C=90°$. **28.** $\approx$0,47 m². **29.** 5,64 m². **30.** $\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. **31.** Indicaţie. Folosiţi afirmaţia problemei 26. **34.** 1) 84; 2) 12; 3) 288; 4) 10; 5) $\frac{2520}{13}$; 6) 1,4. **35.** 1) 11,2; 2) 4; 3) 7,2; 4) 4,8; 5) $\frac{5040}{169}$; 6) $1\frac{97}{183}$. **37.** 1) $R=\frac{65}{8}$, $r=4$; 2) $R=\frac{65}{8}$, $r=1{,}5$ 3) $R=\frac{145}{6}$, $r=\frac{7}{3}$; 4) $R=\frac{35}{\sqrt{96}}\approx 3{,}6$; $r=\frac{\sqrt{6}}{2}\approx 1{,}2$. **38.** 4,5 cm. **40.** R=29 cm, r= 12 cm. **41.** 480 cm². **42.** 540 m². **43.** $\frac{l^2}{4\pi}$. **44.** 1) 20π cm²; 2) 12π m²; 3) $\pi(a^2-b^2)$. **45.** 1) De 4 ori; 2) de 25 ori; 3) de m^2 ori. **46.** 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$; 3) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. **47.** $\frac{1}{4}$. **48.** 2. **49.** 1) $\frac{\pi R^2}{9}$; 2) $\frac{\pi R^2}{4}$. 3) $\frac{5\pi R^2}{12}$; 4) $\frac{2\pi R^2}{3}$; 5) $\frac{5\pi R^2}{6}$; 6) $\frac{11\pi R^2}{12}$. **50.** 1) $\frac{R^2}{2}$; 2) $\frac{Rl}{2}$. **51.** $a^2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. **52.** 1) $(\pi-2)R^2$; 2) $\left(\pi-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)R^2$; 3) $\left(\pi-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)R^2$.

Cuprinsul

CLASA 7

PLANIMETRIA

§ 1. Proprietăţile fundamentale ale celor mai simple figuri geometrice

1 Punctul şi dreapta 4
2 Proprietăţile fundamentale de apartenenţă a punctelor şi dreptelor 4
3. Proprietăţile fundamentale de amplasare reciprocă a punctelor pe dreaptă şi pe plan 5
4 Semidreapta 7
5. Proprietăţile fundamentale de măsurare a segmentelor şi a unghiurilor 8
6. Proprietăţile fundamentale de depunere a segmentelor şi unghiurilor 11
7. Existenţa unui triunghi, egal cu triunghiul dat . . . 12
8. Proprietatea fundamentală a dreptelor paralele . . . 14
9. Axiome, teoreme şi demonstraţii 14
Întrebări pentru repetare 16
Exerciţii 18

§ 2. Unghiuri

10. Unghiuri megieşe 22
11. Unghiuri opuse la vîrf 24
12. Drepte perpendiculare 25
13. Demonstraţie prin reducere la absurd. 26
14. Unghiuri depuse într-un semiplan 27
Întrebări pentru repetare 29
Exerciţii 30

§ 3. Criteriile de egalitate a triunghiurilor

15. Criteriul întîi de egalitate a triunghiurilor 32
16. Criteriul al doilea de egalitate a triunghiurilor . . . 33
17. Triunghiul isoscel 34
18. Mediana, bisectoarea şi înălţimea triunghiului . . . 35
19. Criteriul al treilea de egalitate a triunghiurilor . . . 37
Întrebări pentru repetare 39
Exerciţii 39

§ 4. Suma unghiurilor unui triunghi

20. Criteriile de paralelism al dreptelor 42
21. Suma unghiurilor unui triunghi 46
22. Triunghiul dreptunghic 48
23. Existenţa şi unicitatea perpendicularei pe o dreaptă . 50
Întrebări pentru repetare 51
Exerciţii 52

§ 5. Construcții geometrice

24. Circumferința 55
25. Ce înseamnă problemă de construcție 57
26. Construcția unui triunghi cu laturile date 58
27. Construcția unui unghi egal cu unghiul dat 59
28. Construcția bisectoarei unui unghi 59
29. Împărțirea unui segment în jumătate 60
30. Construcția unei drepte perpendiculare 60
31. Locul geometric al punctelor 61
32. Metoda locurilor geometrice 62
33. Unghiuri înscrise în circumferință 63
Întrebări pentru repetare 66
Exerciții 67

CLASA 8

§ 6. Patrulatere

34. Definiția patrulaterului 72
35. Paralelogramul 73
36. Dreptunghiul. Rombul. Pătratul. 76
37. Teorema lui Tales 78
38. Trapezul 80
Întrebări pentru repetare 83
Exerciții 83

§ 7. Teorema lui Pitagora

39. Cosinusul unui unghi 88
40. Teorema lui Pitagora 89
41. Relațiile dintre laturi și unghiuri într-un triunghi dreptunghic 92
42. Cum se utilizează tablele sinusurilor, cosinusurilor și tangentelor 94
43. Identitățile trigonometrice fundamentale 96
44. Valorile sinusului, cosinusului și tangentei unor unghiuri. 97
45. Variația $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ la creșterea unghiului . . 98
46. Inegalitatea triunghiului 99
Întrebări pentru repetare 100
Exerciții 101

§ 8. Coordonate carteziene pe plan

47. Introducerea coordonatelor pe plan 107
48. Coordonatele mijlocului unui segment 109
49. Distanța dintre puncte 110
50. Ecuația circumferinței 111
51. Ecuația dreptei 113
52. Amplasarea unei drepte în raport cu un sistem de coordonate 115
53. Intersecția unei drepte cu o circumferință 116
54. Definiția sinusului, cosinusului și tangentei pentru orice unghi de la 0° la 180° 117
Întrebări pentru repetare 119
Exerciții 119

§ 9. Transformările figurilor

55. Exemple de transformări ale figurilor 123
56. Mișcarea 126
57. Proprietățile mișcării 128
58. Egalitatea figurilor 130
59. Transformarea de asemănare și proprietățile ei . . . 131
60. Asemănarea figurilor 134
Întrebări pentru repetare 136
Exerciții 137

CLASA 9

§ 10. Vectori pe plan

61. Translația și proprietățile ei 143
62. Noțiune de vector 146
63. Valoarea absolută și direcția vectorului 147
64. Coordonatele vectorului 149
65. Adunarea vectorilor 150
66. Înmulțirea vectorului cu un număr 152
67. Produsul scalar al vectorilor 155
Întrebări pentru repetare 156
Exerciții 158

§ 11. Rezolvarea triunghiurilor

68. Teorema cosinusurilor 161
69. Teorema sinusurilor 163
70. Rezolvarea triunghiurilor 165
Întrebări pentru repetare 166
Exerciții 167

§ 12. Poligoane

71. Linia frântă 170
72. Poligoane convexe 171
73. Poligoane regulate 173
74. Asemănarea poligoanelor convexe regulate 175
75. Lungimea circumferinței 176
76. Unghi la centru și arc de circumferință 178
Întrebări pentru repetare 179
Exerciții 180

§ 13. Ariile figurilor

77. Noțiune de arie 183
78. Aria dreptunghiului 184
79. Ariile figurilor simple 186
80. Ariile figurilor asemenea 189
81. Aria cercului 190
Întrebări pentru repetare 192
Exerciții 193
Răspunsuri și indicații la exerciții 197

Date despre starea manualului

№№ d/o	Numele şi prenumele elevului	Anul şcolar	Notă pentru starea manualului	
			la începutul anului	la sfîrşitul anului
1				
2				
3				
4				
5				

Учебное издание

ПОГОРЕЛОВ АЛЕКСЕЙ ВАСИЛЬЕВИЧ

ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие для 7—9 классов
средней школы

(На молдавском языке)

Şef de redacţie A. Moraru.
Redactor P. Spinei.
Redactor artistic V. Popescu
Tehnoredactori E. Taras, T. Vlas.
Corector S. Sîrbu.

FI № 5181.

Dat la cules 20.12.89. Bun de tipar 15.03.90. Formatul 84×108$^{1}/_{32}$. Hîrtie pentru cărţi şi reviste. Garnitură literară. Tipar înalt. Coli de tipar conv. 10,92+0,42 for. Impr. crom. conv. 11,87. Coli editoriale 10,38+0,41 for. Tiraj 55 000. Comanda № 7. Preţul 55 c.

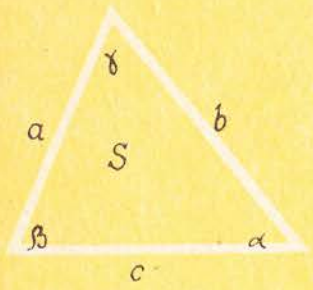
Editura „Lumina", 277004, Chişinău, bulevardul Lenin, 180.

Tipografia centrală, 277068. Chişinău, str. Florilor, 1. Comitetul de Stat al R.S.S. Moldoveneşti pentru edituri, poligrafie şi comerţul cu cărţi.

RELAȚIILE ÎNTR-UN TRIUNGHI ARBITRAR

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

(TEOREMA SINUSURILOR)



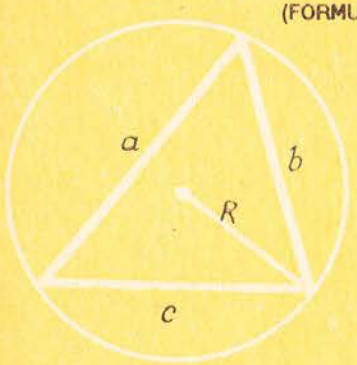
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

(TEOREMA COSINUSURILOR)

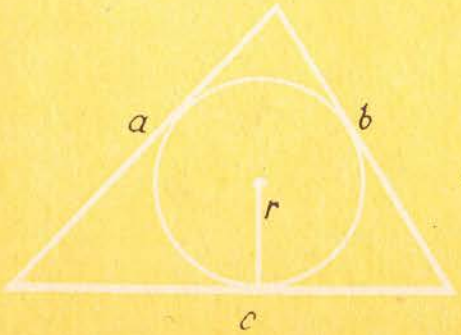
$$S = \frac{1}{2}\, a\, b \sin\gamma$$

$$S = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}, \text{ unde } p = \frac{1}{2}\,(a+b+c)$$

(FORMULA LUI HERON)



$$R = \frac{a\,b\,c}{4\,S}$$



$$r = \frac{2\,S}{a+b+c}$$

ALFABETUL LATIN FOLOSIT ÎN MATEMATICĂ

LITERE DE TIPAR	LITERE De MÎNĂ	DENUMIRILE LITERELOR
Aa	$\mathcal{A}a$	a
Bb	$\mathcal{B}b$	be
Cc	$\mathcal{C}c$	ce
Dd	$\mathcal{D}d$	de
Ee	$\mathcal{E}e$	e
Ff	$\mathcal{F}f$	ef
Gg	$\mathcal{G}g$	ge
Hh	$\mathcal{H}h$	haș
Ii	$\mathcal{I}i$	i
Jj	$\mathcal{J}j$	jI
Kk	$\mathcal{K}k$	ca
Ll	$\mathcal{L}l$	el
Mm	$\mathcal{M}m$	em

LITERE DE TIPAR	LITERE DE MÎNĂ	DENUMIRILE LITERELOR
Nn	$\mathcal{N}n$	en
Oo	$\mathcal{O}o$	o
Pp	$\mathcal{P}p$	pe
Qq	$\mathcal{Q}q$	chiu
Rr	$\mathcal{R}r$	er
Ss	$\mathcal{S}s$	es
Tt	$\mathcal{T}t$	te
Uu	$\mathcal{U}u$	u
Vv	$\mathcal{V}v$	ve
Ww	$\mathcal{W}w$	dublu ve
Xx	$\mathcal{X}x$	ics
Yy	$\mathcal{Y}y$	i grec
Zz	$\mathcal{Z}z$	zet

UNELE LITERE ALE ALFABETULUI GREC

Literele	α	β	γ	δ	λ	μ
Denumirile	alfa	beta	gama	delta	lambda	miu

Literele	π	ϱ	τ	φ	ψ	ω
Denumirile	pi	ro	tau	fi	psi	omega